Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Introducción a Superficies de Riemann y Teoría de Haces

Jaider Daniel Torres

Orientador:
Phd. Leonardo Roa Leguizamón

Bogotá DC
Diciembre de 2023

Resumen

Las superficies de Riemann son variedades complejas de dimensión 1. Un enfoque analítico del estudio de las superficies de Riemann está motivado por la identificación de estos objetos geométricos con el plano complejo, de manera que los resultados clásicos del análisis complejo se aplican en este contexto. Sin embargo, el enfoque algebraico adquiere mayor protagonismo cuando hablamos de describir y clasificar estos objetos, y está motivado principalmente por la geometría algebraica. En este sentido, estudiamos las superficies de Riemann para comprender una primera aproximación de este concepto. Realizamos de forma explícita un número considerable de ejemplos clásicos junto con los resultados respectivos. También estudiamos Divisores en Superficies de Riemann e introducimos los haces y prehaces, una herramienta fundamental en el estudio de las superficies de Riemann.

Palabras clave: Superficies de Riemann, Divisores, Haces y Prehaces.

Clasificación AMS: 14H55 - Riemann surfaces.

Abstract

Riemann surfaces are complex varieties of dimension 1. An analytical approach to the study of Riemann surfaces is motivated by the identification of these geometric objects with the complex plane, so that the classical results of complex analysis apply in this context. However, the algebraic approach acquires greater prominence when we talk about describing and classifying these objects, and it is mainly motivated by algebraic geometry. In this sense, we study Riemann surfaces to understand a first approximation of this concept. We explain a considerable number of classical examples together with the respective results. We also study Divisors on Riemann surfaces and introduce sheaves and presheaves, a fundamental tool in the study of Riemann surfaces.

Keywords: Riemann surfaces, Divisors, Shaves and Presheaves.

Índice

Introducción **1**

1. Superficies de Riemann **2**

2. Ejemplos de Superficies de Riemann **5**

3. Curvas Planas Afínes y Proyectivas **9**

3.1. Curvas Planas Afínes 9

3.2. Curvas Planas Proyectivas 12

4. Funciones y Formas Sobre Superficies de Riemann **14**

4.1. Funciones Holomorfas 14

4.2. Funciones Meromorfas 16

4.2.1. Series de Laurent 17

4.3. 1-Formas Holomorfas y Meromorfas 20

5. Divisores Sobre Superficies de Riemann **21**

5.1. Cadenas y Homología 23

5.2. Espacios de Funciones y Formas Asociados a Divisores 23

6. Haces y Prehaces **25**

6.1. Relaciones Entre Haces 31

Introducción

La existencia de las *superficies de Riemann* surgió a mediados del siglo diecinueve, a manos del matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 1826-Verbania, 1866), como uno de los principales resultados de su conocimiento en análisis, topología y álgebra. De hecho, en Noviembre de 1851 Riemann hizo entrega de su trabajo *Fundamentos de una Teoría General de Variable Compleja* para optar por el título de doctor en filosofía matemática, en la Universidad de Göttingen. En este trabajo, Riemann da simplemente un esquema de un basto programa. Sin embargo, como era de esperarse, su teoría empezó a ser desarrollada a partir de su trabajo y seis años después aparecen fuertes conexiones entre funciones algebraicas y superficies compactas desde el punto de vista del análisis. Aparece el número g, derivado topológicamente de los números de conectividad $2g+1$, llamado *género*, y con este resultados fundamentales como el Teorema de Riemann-Roch y la Fórmula de Riemann-Hurwitz (ver [Rem98]). El objetivo de este trabajo es realizar una introducción amena a esta teoría en base a los libros *Superficies de Riemann y Curvas Algebraicas*, del autor *Rick Miranda*, y *Lectures on Riemann Surfaces*, del autor *Robert Gunning*, abordando los conceptos base hasta algunas relaciones entre haces sobre superficies de Riemann.

1. Superficies de Riemann

Sea $X = (X, \tau_X)$ un espacio topológico, con X un conjunto y τ_X una topología sobre X. En esta sección estudiamos espacios topológicos que se ven localmente como un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, esto es, dado un abierto U de X, tendremos un abierto V de $\mathbb{C}$ tal que los puntos $z_p \in U$ son coordenadas locales para cada $p \in U$. Más aún, queremos que estos conjuntos sean topológicamente equivalentes, es decir, que sean homeomorfos.

En este sentido, definimos carta compleja sobre el espacio topológico X.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una *carta compleja* sobre X es un homeomorfismo $\varphi : U \to V$, donde U es abierto en X y V es abierto en $\mathbb{C}$. El abierto $U \subseteq X$ es llamado el dominio de la carta compleja φ. Si $\varphi(p) = 0$, decimos que φ está centrada en p.

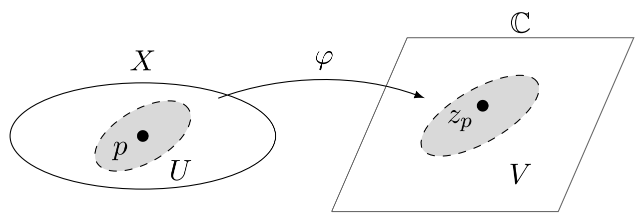

Figura 1: Carta compleja sobre X.

Bajo esta definición, dado un espacio topológico X y una carta compleja φ_α sobre X, tenemos que $\varphi_\alpha(p) = z_p$, para $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha$ y $z_p \in \varphi_\alpha(\operatorname{dom}\varphi_\alpha)$, esto es, tenemos coordenadas complejas para cada $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha \subseteq X$.

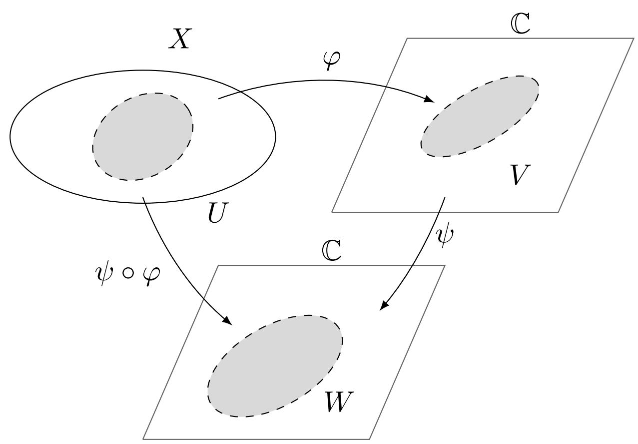

Figura 2: Compatibilidad de cartas complejas sobre X.

Sean X un espacio topológico, $\varphi : U \subseteq X \to V \subseteq \mathbb{C}$ una carta compleja sobre X y $\psi : V \to W$ una biyección holomorfa, con W abierto en $\mathbb{C}$. Puesto que ψ es una biyección, existe su inversa ψ^{-1}, y como ψ es holomorfa, el teorema de la función inversa implica que ψ^{-1} es holomorfa. Así, ψ es un biholomorfísmo entre los abiertos V y W (ver [Ahl66], Cap 3, Sec 2.3, Pág 74). Como $\psi \circ \varphi : U \to W$ es un homeomorfismo, por la definición anterior $\psi \circ \varphi$ es una carta compleja sobre X.

La observación anterior permite plantear las siguientes preguntas: ¿Imponen φ y $\psi\circ\varphi$ diferentes estructuras sobre $U \subseteq X$? ¿Cuál es la diferencia entre φ y $\psi \circ \varphi$? Localmente, dos cartas complejas sobre un espacio topológico no deberían imponer diferente estructura sobre su dominio común. En este caso particular, podemos pensar en ψ como un cambio de coordenadas. Respecto a la diferencia entre dos cartas, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico y sean φ_α, φ_β dos cartas complejas sobre X. Decimos que φ_α y φ_β son compatibles si

(1) $\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta = \emptyset$ o

(2) la función $T_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta) \to \varphi_\beta(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$.

La función $T_{\beta\alpha}$ es llamada función de transición entre las cartas φ_β, φ_α, respectivamente. No es difícil notar que esta definición es simétrica: si $T_{\beta\alpha}$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$, entonces $T_{\beta\alpha}^{-1} := T_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\beta(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$. Mostraremos a continuación una importante propiedad de la función de transición entre dos cartas que será útil posteriormente.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico y φ_α, φ_β dos cartas complejas sobre X. Entonces $T'_{\alpha\beta}$ es no nula en todo su dominio.*

Demostración. Como $T_{\beta\alpha}(T_{\alpha\beta}(z)) = z$, entonces $T'_{\beta\alpha}(T_{\alpha\beta}(z)) \cdot T'_{\alpha\beta}(z) = 1$ para todo $z \in \varphi_\beta(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$. Por tanto, $T'_{\alpha\beta}(z) \neq 0$ para todo $z \in \varphi_\beta(\operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta)$.

□

A continuación presentamos importantes resultados del análisis complejo que nos permitirán determinar propiedades de las superficies de Riemann (ver [Ahl66], Cap 4).

Definición 1.3. Un espacio topológico X es arco conexo si para todo $a, b \in X$ existe una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$; esto es, si existe un camino continuo en X uniendo a y b.

Esto motiva lo siguiente.

Definición 1.4. Un espacio topológico U es simplemente conexo si es arco conexo y, para cada par de caminos $p : [0,1] \to U$, $q : [0,1] \to U$ tales que $p(0) = q(0)$ y $p(1) = q(1)$, existe una función continua $F : [0,1] \times [0,1] \to U$ tal que $F(x,0) = p(x)$ y $F(x,1) = q(x)$, esto es, los caminos son homotópicos.

Teorema 1.1. *(Teorema de la integral de Cauchy) Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $\gamma : [0,1] \to U$ una curva suave y cerrada. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema 1.2. *(Fórmula de la integral de Cauchy: Resultado general) Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto U que contiene a $\overline{B_r(z_0)}$, con $r > 0$ y $z_0 \in U$. Entonces, para todo $a \in B_r(z_0)$ y $n \in \mathbb{N}$, la $n-$ésima derivada de f en a existe y*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial\overline{B_r(z_0)}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

donde $\partial\overline{B_r(z_0)}$ es recorrida contra manecillas del reloj. Esto implica que $f \in \mathcal{C}^\infty$.

Teorema 1.3. *Sea a un número complejo, $r > 0$ un número real y f una función holomorfa en alguna bola abierta $D = B_r(a)$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

para todo $z \in D$.

Los resultados anteriores implican que la función de transición entre dos cartas puede ser expresada mediante una serie de potencias. En particular, sean φ_α,φ_β dos cartas complejas sobre un espacio topológico X, $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta$ y $T_{\alpha\beta}$ su función de transición. Denotando por $z = \varphi_\alpha(x)$, $z_0 = \varphi_\alpha(p)$, $w = \varphi_\beta(x)$ y $w_0 = \varphi_\beta(p)$, tenemos que $T_{\alpha\beta}$ es de la forma

$$T_{\alpha\beta}(w) = z_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{T_{\alpha\beta}^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n.$$

Ahora, ya que nuestro objetivo es identificar todo un espacio topológico localmente con abiertos del plano complejo, queremos determinar un cubrimiento abierto del espacio topológico cuyos abiertos sean homeomorfos a abiertos del plano.

Definición 1.5. Un *atlas complejo* sobre un espacio topológico X es una colección $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ de cartas complejas sobre X tal que:

(1) Cada par de cartas $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$ son compatibles.

(2) $\bigcup\limits_\alpha \operatorname{dom}\varphi_\alpha = X$.

Observación 1. Sean X un espacio topológico, φ una carta compleja sobre X y $V \subseteq \operatorname{dom}\varphi$ abierto en la topología de subespacio sobre $\operatorname{dom}\varphi \subseteq X$. Entonces $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ es una carta compleja sobre X. Llamamos a $\varphi|_V$ una subcarta de φ.

Observación 2. Sea $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un atlas complejo sobre un espacio topológico X y Y un subconjunto de X. Entonces $\mathcal{A}|_Y = \{\varphi_\alpha|_{Y\cap \operatorname{dom}\varphi_\alpha} : Y \cap \operatorname{dom}\varphi_\alpha \to \varphi_\alpha(Y \cap \operatorname{dom}\varphi_\alpha)\}$ es un atlas complejo sobre Y.

Las observaciones anteriores permiten definir diferentes atlas complejos sobre un espacio topológico X. Entonces, ¿Cuándo dos atlas complejos definen la misma estructura sobre el espacio topológico X?

Definición 1.6. Sean $\mathcal{A}_\alpha = \{\varphi_\alpha\}$, $\mathcal{A}_\beta = \{\psi_\beta\}$ dos atlas complejos sobre un espacio topológico X. Decimos que $\mathcal{A}_\alpha$ y $\mathcal{A}_\beta$ son equivalentes si φ_α y ψ_β son compatibles para cada $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, $\psi_\beta \in \mathcal{A}_\beta$, o, equivalentemente, si $\mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_\beta$ es un atlas complejo sobre X.

Podría ocurrir que dado $\mathcal{A}_\alpha$ un atlas complejo sobre un espacio topológico X, exista un atlas que lo contenga. Esto nos conduce al siguiente resultado.

Proposición 1.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

(1) Todo atlas complejo sobre X está contenido en un único atlas complejo maximal.

(2) Todo atlas complejo sobre X está contenido en una clase de equivalencia de atlas complejos sobre X.

Demostración.

(1) Sea $\mathcal{A}_\alpha$ un atlas complejo sobre X. Sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i : \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_i\}$ el conjunto de todos los atlas complejos sobre X conteniendo $\mathcal{A}_\alpha$. Notemos que $\mathcal{A}$ es no vacío pues $\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{A}$. Más aún, $\mathcal{A}$ está parcialmente ordenado por la relación de contenencia. Sea $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j \ldots$ una cadena de $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_k \mathcal{A}_k$, con $\mathcal{A}_k$ en la cadena. Claramente $\mathcal{B}$ es un atlas sobre $\mathcal{A}$, de modo que $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{B}$ es un elemento maximal de la cadena $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j \ldots$. Así, $\mathcal{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena ascendente tiene al menos un elemento maximal. El lema de Zorn garantiza la existencia de un único elemento maximal $\hat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$. Si $\hat{\mathcal{A}}'$ fuese otro elemento maximal de $\mathcal{A}$, entonces $\hat{\mathcal{A}} \cup \hat{\mathcal{A}}' \in \mathcal{A}$ y $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}} \cup \hat{\mathcal{A}}'$, lo que contradice la maximalidad de $\hat{\mathcal{A}}$ en $\mathcal{A}$.

De aquí concluimos que todo atlas complejo sobre X está contenido en un único atlas maximal.

(2) Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los atlas complejos sobre X. Sea $\sim$ la relación en $\mathcal{A}$ definida como $\mathcal{A}_i \sim \mathcal{A}_j$ si y sólo si $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_j$ es un atlas complejo sobre X. La relación $\sim$ es reflexiva y simétrica. Veamos que la relación $\sim$ es transitiva. Supongamos que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ son atlas complejos sobre X, y sean $\varphi_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 3$. Como $\mathcal{A}_2$ es un atlas complejo sobre X, para cada $x \in \operatorname{dom} \varphi_1 \cap \operatorname{dom} \varphi_3$ existe $\varphi_2 \in \mathcal{A}_2$ tal que $x \in \operatorname{dom} \varphi_2$. Pero φ_1, φ_2 y φ_2, φ_3 son compatibles, de modo que φ_1, φ_3 son localmente compatibles en x. Por la arbitrariedad de $x \in \operatorname{dom} \varphi_1 \cap \operatorname{dom} \varphi_3$ y las cartas $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1$, $\varphi_3 \in \mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3$ es un atlas complejo sobre X. Luego, $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$. Así, el conjunto cociente $\mathcal{A}/\sim = \{[\mathcal{A}_\alpha] : \mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{A}\}$ tiene como elementos todas las clases de equivalencia de atlas complejos sobre X. Por tanto, si $\mathcal{A}_\alpha$ es un atlas complejo sobre X, existe $[\mathcal{A}_\beta] \in \mathcal{A}/\sim$ tal que $\mathcal{A}_\alpha \in [\mathcal{A}_\beta]$.

$\square$

Este resultado nos lleva a definir la noción de estructura compleja sobre un espacio topológico.

Definición 1.7. Una *estructura compleja* sobre un espacio topológico X es una clase de equivalencia de atlas complejos sobre X o, equivalentemente, una atlas complejo maximal sobre X.

Con lo anterior, estamos listos para definir superficie de Riemann.

Definición 1.8. (Superficie de Riemann) Una ***superficie de Riemann*** es un espacio topológico X Hausdorff, conexo y segundo contable junto con una estructura compleja sobre X.

2. Ejemplos de Superficies de Riemann

En esta sección veremos una serie de ejemplos clásicos de superficies de Riemann.

Ejemplo 2.1. Sean $X = (\mathbb{R}^2, \tau_{\mathbb{R}^2})$, con $\tau_{\mathbb{R}^2}$ la topología usual de $\mathbb{R}^2$, y $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, donde $U_\alpha \subseteq X$ y $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ son abiertos y φ_α está definida por $(x, y) \mapsto \varphi_\alpha(x, y) = x + iy$. Notemos que φ_α es un homeomorfismo entre U_α y V_α, de modo que φ_α es una carta compleja sobre X. Las cartas de $\mathcal{A}$ son compatibles dos a dos pues $T_{\beta\alpha}(z) = z$ para todo $z \in \varphi_\alpha(\operatorname{dom} \varphi_\alpha \cap \operatorname{dom} \varphi_\beta)$ y φ_α, $\varphi_\beta \in \mathcal{A}$. Además, X es un espacio topológico conexo, Hausdorff y segundo contable. Por tanto, X es una superficies de Riemann. Identificando $X = \mathbb{R}^2$ topológicamente con $\mathbb{C}$, X se conoce como el **plano complejo**.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbb{S}^2 := \left\{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, w)\|^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ la 2-esfera. Sea $U_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$. Sean $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ definida por

$$(x, y, w) \mapsto \frac{x}{1 - w} + i\frac{y}{1 - w}$$

y $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ definida por

$$(x, y, w) \mapsto \frac{x}{1 + w} - i\frac{y}{1 + w}.$$

φ_0 es homeomorfismo con inversa φ_0^{-1} definida por

$$z \mapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right).$$

Del mismo modo, φ_1 es homeomorfismo con inversa φ_1^{-1} definida por

$$z \mapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, -\frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1}\right).$$

Esto implica que φ_0, φ_1 son cartas complejas sobre $\mathbb{S}^2$. Notemos que el dominio común de las cartas es $U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$. Así $\varphi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$, $i = 0, 1$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} T_{10}(z) &= \varphi_1(\varphi_0^{-1}(z)) \\ &= \frac{2\mathrm{Re}(z)(|z|^2+1)}{2|z|^2(|z|^2+1)} - i\frac{2\mathrm{Im}(z)(|z|^2+1)}{2|z|^2(|z|^2+1)} \\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Luego, φ_0 y φ_1 son compatibles y $\mathcal{A} = \{\varphi_0, \varphi_1\}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{S}^2$. Por la topología de subespacio, $\mathbb{S}^2$ es Hausdorff, segundo contable y $U_0, U_1 \subseteq \mathbb{S}^2$ son abiertos. Como $\mathbb{S}^2 = U_0 \cup U_1$ y los U_i tienen intersección no vacía, $\mathbb{S}^2$ es conexo. Por tanto, $\mathbb{S}^2$ es una superficie de Riemann. Esta superficie es llamada **Esfera de Riemann**.

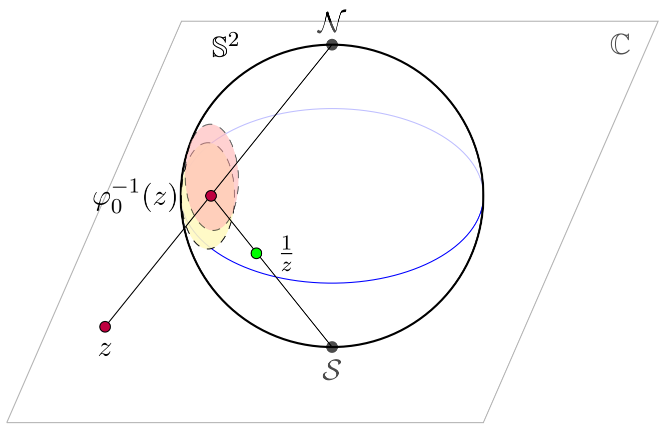

Figura 3: Esfera de Riemann.

Para los siguientes ejemplos introduciremos algunas definiciones y resultados clásicos de geometría algebraica.

Definición 2.1. El **espacio afín** $\mathbb{A}_k^n$ de dimensión n sobre el cuerpo k es el conjunto

$$\mathbb{A}_k^n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in k\}.$$

Denotamos por $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$.

Notemos que la distinción entre los espacios k^n y $\mathbb{A}_k^n$ es que, visto como $k-$espacio vectorial, en k^n nos importa el rol de $\overline{0}$ (identidad aditiva, etc), mientras que en el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ no. La topología considerada en $\mathbb{A}_k^n$ es llamada **topología de Zariski**. Aún así, cuando el cuerpo es conocido ($k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$), podemos considerar la topología natural de k^n (que será la topología producto o de caja, coincidiendo estas por el índice finito n) como una topología de $\mathbb{A}_k^n$. Puesto que el cuerpo en el que trabajamos es $\mathbb{C}$, consideraremos el espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ con la topología de $\mathbb{C}^n$.

A partir del espacio afín $\mathbb{A}_k^{n+1}$ construiremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$.

Consideremos la acción de grupo $k^\times \times \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$ dada por $(\lambda, (x_0, \ldots, x_n)) \mapsto (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$. Definimos la órbita de un elemento $(x_0, \ldots, x_n) = \overline{x} \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$ como $\mathrm{Orb}(\overline{x}) = \{\lambda \overline{x} : \lambda \in k^\times\}$. Esta acción de grupo induce una relación $\sim_{k^\times}$ definida como $x \sim_{k^\times} y$, si y sólo si $\overline{x} \in \mathrm{Orb}(\overline{y})$. Demostraremos que $\sim_{k^\times}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$.

Proposición 2.1. *La relación $\sim_{k^\times}$ definida anteriormente es una relación de equivalencia en $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$.*

Demostración. $i)$ Sea $\overline{x} \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$. Entonces $\overline{x} = 1\ \overline{x} \in \mathrm{Orb}(\overline{x})$, lo cual implica que $\overline{x} \sim_{k^\times} \overline{x}$. Por lo tanto, $\sim_{k^\times}$ es simétrica. $ii)$ Supongamos que $\overline{x} \sim_{k^\times} \overline{y}$, entonces $\overline{x} = \lambda\overline{y}$ para algún $\lambda \in k^\times$. Como $\lambda \in k^\times$ es invertible tenemos que $\overline{y} = \lambda^{-1}\ \overline{x}$, de donde $\overline{y} \sim_{k^\times} \overline{x}$. Así, $\sim_{k^\times}$ es simétrica. $iii)$ Supongamos que $\overline{x} \sim_{k^\times} \overline{y}$ y $\overline{y} \sim_{k^\times} \overline{z}$. Entonces $\overline{x} = \lambda\overline{y}$ y $\overline{y} = \eta\overline{z}$, para ciertos elementos $\lambda, \eta \in k^\times$. De este modo $\overline{x} = \lambda(\eta\overline{z}) = (\lambda\eta)\overline{z}$ y por tanto $\overline{x} \sim_{k^\times} \overline{z}$. Luego, $\sim_{k^\times}$ es transitiva. Concluimos de $i)$, $ii)$ y $iii)$ que $\sim_{k^\times}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$. □

Como $\sim_{k^\times}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$, podemos considerar el conjunto cociente $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} / k^\times :=$ $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} / \sim_{k^\times} \overset{def}{=} \{\mathrm{Orb}(\overline{x}) : \overline{x} \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}\}$. Definiendo $\mathbb{P}_k^n := \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} / k^\times$ y $\mathrm{Orb}(\overline{x}) = \mathrm{Orb}(x_0, \ldots, x_n) :=$ $[x_0 : \ldots : x_n]$, obtenemos la representación usual del espacio proyectivo de dimensión n sobre el cuerpo k.

Definición 2.2. El **espacio proyectivo** $\mathbb{P}_k^n$ de dimensión n sobre el cuerpo k es el conjunto

$$\mathbb{P}_k^n = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] : (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}\right\}.$$

Queremos resaltar ciertas características, en particular, del espacio proyectivo de dimensión n sobre $\mathbb{C}$, pues nos serán útiles posteriormente. Sea $U_i := \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n : x_i \neq 0\}$, $i = 0, \ldots, n$. Claramente $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$. Notemos que $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ definida por $[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i})$ es un homeomorfismo con inversa $\varphi_i^{-1} : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \to U_i$ definida por $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [a_1 : \ldots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \ldots : a_n]$, para $i = 0, \ldots, n$. Como la conexidad es un invariante topológico y $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ es conexo, entonces cada U_i también es conexo en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, lo que hace de este mismo un espacio topológico conexo (pues es unión de los abiertos no disjuntos U_i). Además, ya que $U_i \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$, cada U_i es Hausdorff pues $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ es Hausdorff. Más aún, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \varphi_i^{-1}(\overline{D^n})$, donde $\overline{D^n} =$ $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \|(z_1, \ldots, z_n)\| \leq 1\}$ es el n-disco unitario en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$. Como φ_i es un homeomorfismo y $\overline{D^n}$ es compacto en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es un espacio topológico compacto.

Veamos que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es Hausdorff. Sean $p, q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Si $p, q \in U_i$, entonces son separables ya que cada U_i es Hausdorff. Supongamos que $p \in U_i - \bigcup_{j \neq i} U_j$ y $q \in U_k - \bigcup_{j \neq k} U_j$, con $i \neq k$. Esto fuerza a p tener un 1 en la $i-$ésima entrada y q un 1 en la $k-$ésima. Estos son separables por $\varphi^{-1}(D^n)$, donde $D^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \|(z_1, \ldots, z_n)\| < 1\}$ es el $n-$disco abierto unitario en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$. Por lo tanto, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es Hausdorff.

Fijando $k = \mathbb{C}$ y $n = 1$, obtenemos el espacio proyectivo de dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. A continuación, demostraremos que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es una superficie de Riemann.

Ejemplo 2.3. Consideremos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \left\{[z : w] : (z, w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\}$ y $\mathcal{A} = \{\varphi_0, \varphi_1\}$. Por lo visto en la construcción del espacio proyectivo, φ_i es una carta compleja de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, $i = 0, 1$. Explícitamente, $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ está definida como $[z : w] \mapsto \frac{w}{z}$ y $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ está definida como $[z : w] \mapsto \frac{z}{w}$. Las inversas φ_0^{-1}, φ_1^{-1} están definidas por $z \mapsto [1 : z]$ y $z \mapsto [z : 1]$, respectivamente. Además, $T_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ envía z en $\frac{1}{z}$, que es holomorfa en $\varphi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$. Así, φ_0, φ_1 son compatibles y $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. También hemos visto que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es conexo y Hausdorff. Explícitamente, como $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = U_0 \cup U_1$ y $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es conexo. Para demostrar que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es Hausdorff, consideremos $p, q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Si $p, q \in U_i$, estos son separables ya que U_i es Hausdorff. Supongamos que $p \in U_0 - U_1$ y $q \in U_1 - U_0$. Esto fuerza a que $p = [1 : 0]$ y $q = [0 : 1]$. Notemos que $\varphi_0^{-1}(D) = \left\{[1 : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : z \in D\right\}$ y $\varphi_1^{-1}(D) = \left\{[z : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : z \in D\right\}$, de modo que $\varphi_0^{-1}(D) \cap \varphi_1^{-1}(D) = \{[1 : 1]\}$, con $D \subset \mathbb{C}$ el disco abierto de unidad. Pero $\varphi_i[1 : 1] = 1 \notin D$. Luego, aunque $[1 : 1] = \lambda[1 : 1]$, realmente $\varphi_i^{-1}(D)$, $i = 0, 1$, tienen intersección vacía. Estos separan p y q. Así, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es Hausdorff. Notemos además que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \varphi_0^{-1}(\overline{D}) \cup \varphi_1^{-1}(\overline{D})$. Por tanto, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es una superficie de Riemann compacta. Esta es llamada **Recta Proyectiva Compleja**.

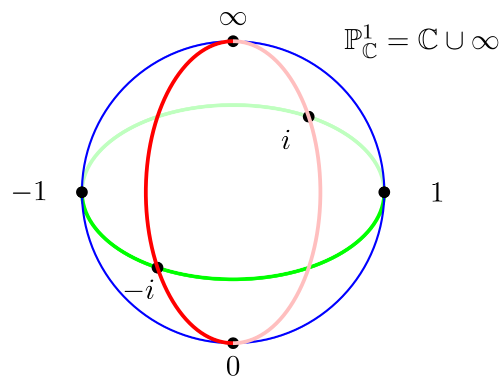

Figura 4: Recta Proyectiva Compleja.

En la Figura 4, la recta proyectiva compleja fue ilustrada de esta manera debido a que $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ son homeomorfos mediante la aplicación $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ definida por

$$[z : w] \mapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(w\overline{z})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(w\overline{z})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|w|^2 - |z|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right),$$

con inversa $\psi^{-1} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ definida por

$$(s, t, v) \mapsto \left[1 : \frac{s}{1 - v} + i\frac{t}{1 - v} \right]$$

($\psi[0 : 1] := (0, 0, 1)$ es el *punto al infinito*), donde la bicontinuidad de ψ se obtiene porque esta es una composición de homeomorfismos correspondientes a cartas sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{S}^2$.

Antes de seguir estudiando superficies de Riemann en el espacio afín o proyectivo, presentaremos un importante ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ un subconjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$. Consideremos el retículo $\Lambda = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_i \in \mathbb{Z}\}$.

Claramente Λ es un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ y, ya que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, podemos considerar el conjunto cociente $\mathbb{C}/\Lambda = \{[a] : a \in \mathbb{C}\}$, donde $[a] = \{b \in \mathbb{C} : b - a \in \Lambda\}$ es la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{C}$. La proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$, definida por $z \mapsto [z]$, dota de la topología cociente a $\mathbb{C}/\Lambda$.

Ahora, si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + U)$$

es la unión de los abiertos respectivos a traslaciones de U por $\lambda \in \Lambda$ en $\mathbb{C}$. Por tanto, $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en $\mathbb{C}$. Luego, π es una aplicación abierta.

Más aún, sea $m < \mathrm{mín}\,\{|\omega_1|, |\omega_2|\}$ positivo y tomemos $\varepsilon = \frac{m}{2}$. Entonces $\Lambda \cap \{B_\varepsilon(x) - \{x\}\} = \emptyset$ para todo $x \in \Lambda$. Esto implica que cada punto de Λ es un punto aislado. Por tanto, Λ es un subconjunto discreto de $\mathbb{C}$.

Denotemos $N(x) := B_\varepsilon(x)$, con ε definido de la forma de arriba y $x \in \mathbb{C}$. De ahora en adelante $N(x) \subseteq X$ denotará una vecindad abierta de un punto $x \in X$. Como Λ es discreto en $\mathbb{C}$ y π es una aplicación abierta, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(N(x))) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + N(x))$$

es la unión disjunta de los abiertos respectivos a traslaciones de $N(x)$ por $\lambda \in \Lambda$ en $\mathbb{C}$. Esto implica que $\pi|_{N(x)} : N(x) \to \pi(N(x))$ es un homeomorfismo. Tomando $\phi_{x_0} := (\pi|_{N(x_0)})^{-1}$, tenemos que el conjunto $\mathcal{A} = \{\phi_x : x \in \mathbb{C}\}$ es una colección de cartas sobre $\mathbb{C}/\Lambda$. Vamos a demostrar que las cartas de $\mathcal{A}$ son compatibles dos a dos. Sea $U = \pi(N(p)) \cap \pi(N(q))$, $\phi_p, \phi_q \in \mathcal{A}$ y $z \in \phi_q(U)$. Entonces $T_{pq}(z) = \phi_p(\phi_q^{-1}(z)) = \phi_p(\pi(z))$. Notando que $\pi(\phi_p(\pi(z))) = \pi(z)$ para todo $z \in \phi_q(U)$, tenemos que $T_{pq}(z) - z = \omega(z) \in \Lambda$. Así, $\omega : \phi_q(U) \to \Lambda$ es continua, y como Λ es discreto, ω es localmente constante en $\phi_q(U)$. Luego, $T_{pq}(z) = z + \lambda$, con $\lambda \in \Lambda$ fijo, es holomorfa y las cartas $\phi_p, \phi_q \in \mathcal{A}$ son compatibles. De este modo, $\mathcal{A}$ es una atlas complejo sobre $\mathbb{C}/\Lambda$.

Ahora, sea $P_z = \{z + \lambda\omega_1 + \lambda\omega_2 : \lambda \in [0,1]\}$. Entonces, para cada $w \in \mathbb{C}$ existe $z_0 \in P_z$ tal que $w - z_0 \in \Lambda$. De esta forma, π transforma P_z en $\mathbb{C}/\Lambda$ de forma sobreyectiva. Así, ya que P_z es compacto, $\mathbb{C}/\Lambda$ también lo es.

Por tanto, $\mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie de Riemann compacta. Esta superficie es llamada **Toro complejo**.

En el ejemplo anterior notamos de inmediato que el toro complejo es de hecho homeomorfo al toro: como ω_1, ω_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, existe un cambio de coordenadas tal que $\omega_1 = (1,0)$ y $\omega_2 = (0,1)$ (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$). Identificando $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ por medio del homomorfismo $a + \mathbb{Z} \mapsto e^{2i\pi a}$ y considerando el homomorfismo continuo de grupos $\mathbb{C} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dado por $(x,y) \mapsto (x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z})$, vemos que Λ es el kernel del homomorfismo y por tanto se tiene el isomorfismo entre $\mathbb{C}/\Lambda$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, como se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\
\mathbb{C}/\Lambda \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Otra forma de dar cuenta a este hecho es realizando la construcción usual del toro a partir del paralelogramo de vértices 0, ω_1, ω_2 y $\omega_1 + \omega_2$. Es decir, se identifican los lados opuestos, como se muestra en la siguiente figura.

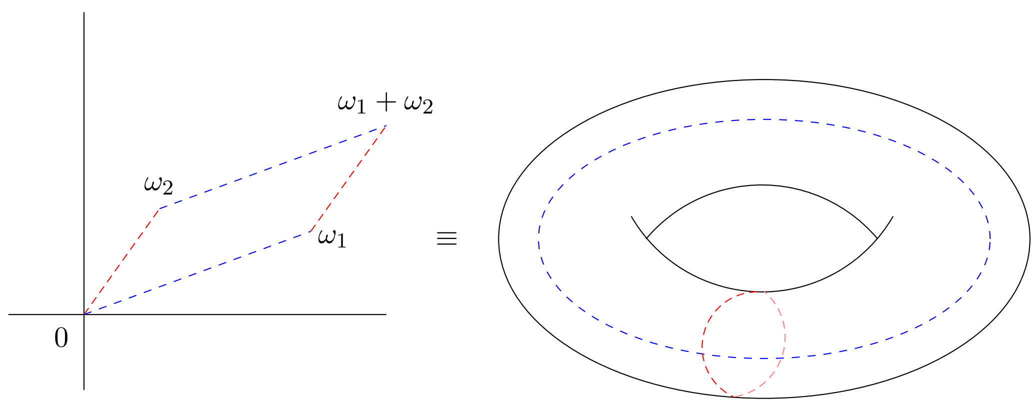

Figura 5: Toro complejo.

3. Curvas Planas Afínes y Proyectivas

3.1. Curvas Planas Afínes

Nuestro objetivo ahora es describir superficies de Riemann más usuales. Para ello, vamos a introducir uno de los principales objetos de estudio de esta sección.

Definición 3.1. Sea $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un conjunto de polinomios. Al conjunto de ceros comunes de los polinomios en S

$$V(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

se le llama **conjunto algebraico afín**, o simplemente **conjunto afín**.

Nuevamente, tomando $k = \mathbb{C}$, si $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ entonces $V(f)$ es el conjunto de $n-$tuplas de números complejos que son ceros de f.

Un primer ejemplo (e importante para la construcción a realizar posteriormente) de superficie de Riemann en este contexto es la gráfica de una función holomorfa: sea $f : U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ holomorfa en U, con U abierto y conexo en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. Definimos

$$\operatorname{graph}(f) = \left\{(z, g_1(z), \ldots, g_n(z)) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1} : z \in U)\right\}$$

como la gráfica de f.

Entonces la proyección de la primera coordenada restringida a $\operatorname{graph}(f)$, esto es, la función $\pi : \operatorname{graph}(f) \to \pi(\operatorname{graph}(f))$ definida por $(z, f(z)) \mapsto z$, es un homeomorfismo y, por tanto, una carta compleja sobre $\operatorname{graph}(f)$ cuyo dominio cubre todo el espacio topológico. Como subconjunto de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$, $\operatorname{graph}(f)$ es Hausdorff, conexo (ya que U lo es) y segundo contable.

Explícitamente, por la topología de subespacio de $\operatorname{graph}(f)$, este es Hausdorff y una base para su topología es la intersección de una base para la topología producto de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ con $\operatorname{graph}(f)$, de modo que es segundo contable. Ahora, ya que cada función componente g_i es holomorfa (pues la función f lo es) y U es conexo, cada $g_i(U)$ también es conexo en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. Así, como $\operatorname{graph}(f)$ es producto cartesiano de conexos, este también es conexo en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Luego, bajo estas observaciones, $\operatorname{graph}(f)$ es una superficie de Riemann. Este ejemplo, en particular, será de gran importancia para dar estructura de Riemann al conjunto de ceros de un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$, siendo este nuestro siguiente paso. Pero primero, presentaremos un importante teorema y una definición que serán necesarios para este fin.

Teorema 3.1. *(Teorema de la función implícita) Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ y $(z_0, w_0) = p \in V(f)$ un cero de f. Supongamos que $f_w(p) \neq 0$. Entonces existe una función $g_p : N(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorfa en una vecindad de z_0 tal que $V(f)|_{N(p)} = graph(g_p)$, es decir, cerca a p, $V(f)$ es la gráfica de la función $g_p(z) = w$. Además, $g_p' = -f_z/f_w$.*

Notemos que si $f_w(p) = 0$, aún puede ser cierto que $f_z(p) \neq 0$. En este caso, existe una función $g_p : N(w_0) \to \mathbb{C}$ holomorfa en una vecindad de w_0 tal que $V(f)|_{N(p)} = \operatorname{graph}(g_p)$, es decir, cerca a p, $V(f)$ es la gráfica de la función $g_p(w) = z$. Además, $g_p' = -f_w/f_z$.

Definición 3.2. Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$. Se define una curva plana afín como el conjunto de ceros de f, $V(f) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. El polinomio f es no singular en $p \in \operatorname{dom}(f)$ si $f_z(p) \neq 0$ o $f_w(p) \neq 0$. La curva plana afín $V(f)$ es no singular en p si f es no singular en p. La curva plana afín $V(f)$ es no singular, o suave, si es no singular en todos sus puntos.

Nuestro objetivo ahora es dar estructura de Superficie de Riemann a $V(f)$ haciendo que esta se vea localmente como la gráfica de una función holomorfa, con ayuda del teorema de la función implícita.

Proposición 3.1. *Una curva plana afín suave es una superficie de Riemann.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ y consideremos la curva plana afín $V(f)$. Supongamos que $V(f)$ es suave. Como $V(f)$ es suave, para todo $p \in V(f)$, $f_w(p) \neq 0$ o $f_z(p) \neq 0$. Supongamos que $f_w(p) \neq 0$, con $p = (z_0, w_0) \in V(f)$. Entonces, el teorema de la función implícita implica la existencia de una función holomorfa en una vecindad de z_0, $g_p : N(z_0) \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, tal que $V(f)|_{N(p)} = \operatorname{Graf}(g_p)$. Considerando la primera proyección $\pi_1|_{N(p)} : N(p) \to \pi_1(N(p))$ dada por $(z, g_p(z)) \mapsto z$, vemos que esta es un homeomorfismo y, por tanto, es una carta compleja sobre $\text{Graf}(g_p) \subseteq V(f)$. Si por el contrario $f_z(p) \neq 0$, entonces existe una función holomorfa en una vecindad de w_0, $g_p : N(w_0) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, tal que $V(f)|_{N(p)} = \{(g_p(w), w) : w \in N(w_0)\}$. Nuevamente, considerando la segunda proyección $\pi_2|_{N(p)} : N(p) \to \pi_2(N(p))$ dada por $(g_p(w), w) \mapsto w$, vemos que esta es un homeomorfismo. Denotando $\pi_1|_{N(p)} =: \pi_{z_p}$ y $\pi_2|_{N(p)} =: \pi_{w_p}$, tenemos que $\mathcal{A} = \left\{\pi_{z_p}, \pi_{w_p} : p \in V(f)\right\}$ es una colección de cartas complejas sobre $V(f)$. Vamos a demostrar que estas son compatibles dos a dos. Sean $\pi_{z_p}, \pi_{w_q} \in \mathcal{A}$ y supongamos que $f_w(p') \neq 0$, para $p' \in N(p) \cap N(q)$. Entonces $T_{w_q z_p}(z) = g_p(z)$, que es holomorfa en todo $\pi_{z_p}(N(p) \cap N(q))$. Por tanto, las cartas son compatibles. Como $V(f)$ es suave, los dominios de las cartas en $\mathcal{A}$ forman un cubrimiento abierto de $V(f)$, de modo que $\mathcal{A}$ define una estructura compleja sobre $V(f)$.

Como subconjunto de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, $V(f)$ es Hausdorff y segundo contable y, si f es irreducible en $\mathbb{C}[z, w]$, también es conexo. Por lo tanto, $V(f)$ es una superficie de Riemann. □

En la demostración de la proposición anterior hemos usado el hecho que si f es un polinomio irreducible, entonces $V(f)$ es conexo. Este es un resultado elemental de geometría algebraica. Haremos la demostración de este resultado con el fin de justificar formalmente la proposición anterior. Antes de enunciar el resultado, presentaremos una definición necesaria.

Definición 3.3. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ un conjunto algebraico. Se define el ideal asociado a X como

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } (a_1, \cdots, a_n) \in X\}.$$

Proposición 3.2. *Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Si f es irreducible sobre k entonces $V(f)$ es conexo en $\mathbb{A}^n_k$.*

Demostración. Si f es irreducible sobre k, entonces $\langle f \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal primo en $k[x_1, \ldots, x_n]$. Denotemos $A := k[x_1, \ldots, x_n]$. Como $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$, pues

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{b} \in \text{Spec } A \\ \mathfrak{b} \supseteq \langle f \rangle}} \mathfrak{b} = \langle f \rangle,$$

$\langle f \rangle$ es radical y vale la igualdad $I(V\langle f \rangle) = \langle f \rangle$. Esto implica que $V\langle f \rangle$ es irreducible. Luego, ya que $V\langle f \rangle \subseteq V(f)$, entonces $V(f)$ es irreducible. Para demostrar esto, supongamos que $V(f)$ es reducible. Entonces existen $g, h \in A$ no constantes tales que $V(f) = V(h) \cup V(g) = V(hg)$. Pero esto implicaría que $V\langle f \rangle = V\langle hg \rangle = V\langle h \rangle \cup V\langle g \rangle$, una descomposición no trivial de $V\langle f \rangle$. Esto contradice la irreductibilidad de $V\langle f \rangle$. Por tanto, $V(f)$ es irreducible. Puesto que la irreductibilidad de $V(f)$ implica su conexidad, la demostración de la proposición está completa. □

Este resultado es generalizado de inmediato mediante la siguiente proposición y su corolario.

Proposición 3.3. *Sea $k = \overline{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $f, g \in k[x, y]$ dos polinomios sin factores en común. Entonces $V(f, g) = V(f) \cap V(g)$ es un conjunto finito de puntos.*

Demostración. Supongamos que $f, g \in k[x][y]$ no tienen factores en común. Notemos que f y g no tienen factores en común en $k(x)[y]$. Para demostrar esto, sea $h/j \in k(x)[y]$ integral sobre $k[x][y]$, donde $h, j \in k[x][y]$ no tienen factores común, y supongamos que $h/j \notin k[x][y]$. Entonces existe un polinomio mónico $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n \in k[x][y]$ tal que $\frac{h^n}{j^n} + a_1 \frac{h^{n-1}}{j^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{h}{j} + a_n = 0$. Esto nos llevaría a que j divide h, contradiciendo que h y j no tienen factores en común. Luego, $h/j \in k[x][y]$. Así, si $f, g \in k(x)[y]$ tienen algún factor en común y $f/g \in k(x)[y]$, entonces $f/g \in k[x][y]$ y f y g tienen factores en común en $k[x][y]$. Esto demostración esta primera afirmación.

Puesto que $k(x)[y]$ es un dominio de ideales principales (pues $k(x)$ es un cuerpo), $\langle f, g \rangle = \langle 1 \rangle$ en $k(x)[y]$. Entonces existen $r, s \in k(x)[y]$ tales que $rf + sg = 1$. Además, existe $d \in k[x]$ tal que $dr = a$ y $ds = b$, con $a, b \in k[x][y]$. Por tanto, $af + bg = d$. Si $(x_0, x_1) \in V(f, g)$, entonces $d(x_1) = 0$. Pero d solo tiene un número finito de ceros. Esto demostración que solo hay una cantidad finita de coordenadas que son la primera componente de los puntos en $V(f, g)$. Análogamente, solo hay una cantidad finita de coordenadas que son la segunda componente de los puntos en $V(f, g)$. Por tanto, $V(f, g)$ es finito. □

Corolario 3.1. *Si $f \in \mathbb{C}[z,w]$ es irreducible, entonces Sing$(f) := V(f, f_z, f_w)$ es finito.*

De estos dos resultados obtenemos que la parte suave de toda curva plana afín es de hecho una superficie de Riemann. Específicamente, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Sea $f \in \mathbb{C}[z,w]$ irreducible. Entonces Suave$(f) := V(f) - $Sing$(f)$ es una superficie de Riemann.*

Demostración. Como f es irreducible, la Proposición 3.1 junto con los resultados recién mencionados implican que Suave(f) es una superficie de Riemann. $\square$

Ejemplo 3.1. Consideremos el polinomio $z^3 - (w-1)^2 \in \mathbb{C}[z,w]$. Como este es irreducible y no singular, $V(z^3 - (w-1)^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ es una curva plana afín suave, y por tanto, una superficie de Riemann. Por otro lado, el polinomio $f(z,w) = z^3 - w^2 \in \mathbb{C}[z,w]$ es singular en $\{(0,0)\} = \mathrm{Sing}(f) \subseteq V(f)$, de modo que la parte suave de la curva plana afín $V(f) - \mathrm{Sing}(f)$ es una superficie de Riemann.

3.2. Curvas Planas Proyectivas

Vamos a estudiar nuevamente objetos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$. Para ello, necesitaremos naturalmente dar una importante definición y hacer ciertas observaciones.

En primer lugar, empezamos notando que si $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, no tiene sentido evaluar f en un punto $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k$ (recordemos que $[x_0 : \dots : x_n]$ es una clase de equivalencia), de modo que esto no está bien definido. Consideremos la siguiente definición.

Definición 3.4. Un polinomio $f \in k[x_0, \cdots x_n]$ es homogéneo de grado $\deg f = d \in \mathbb{Z}^+$ en las variables $x_k \in \{x_i\}_{i \in I}$, con $I \subseteq [n] := \mathbb{N} \cap [0,n]$, si

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i \in I} a_i x_k^{d_{k_i}} \cdots x_j^{d_{j_i}},$$

donde $\sum_i d_{l_i} = d$, $x_k \in \{x_i\}_{i \in I}$ y $a_i \in k$.

Por ejemplo, $zx^2 + 3z^2xy^3 \in k[x,y,z]$ es homogéneo en las variables x, z de grado 3, pero no es homogéneo en todas las variables. El polinomio $x^2 + y^2 + z^2 \in k[x,y,z]$ es homogéneo de grado 2 en todas las variables. Por polinomios homogéneos nos referiremos a aquellos que son homogéneos en todas sus variables.

Ahora, notemos que si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es homogéneo, $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg f} f(x_0, \dots, x_n)$. Así, si $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_k$ es un cero de f, tenemos que $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^{\deg f} f(a_0, \dots, a_n) = 0$, para todo $\lambda \in k^\times$. Así, como $[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ para todo $\lambda \in k^\times$, sí tiene sentido y está definido hablar de los ceros de un polinomio homogéneo en el espacio proyectivo. Esto nos lleva a la definición de conjunto algebraico proyectivo.

Definición 3.5. Sea $\mathfrak{a} \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Al subconjunto de $\mathbb{P}^n_k$ definido por los ceros de los polinomios homogéneos en $\mathfrak{a}$

$$V_+(\mathfrak{a}) := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k : f(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo polinomio homogéneo } f \in \mathfrak{a}\}$$

se le llama **conjunto algebraico proyectivo**.

En particular, si $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, se define el conjunto algebraico proyectivo definido por sus ceros homogéneos como $V_+(f) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n_k : f(a_0, \dots, a_n) = 0\}$.

Como una última observación, considerando $f_i(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) := f(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$, tenemos que $V_+(f) \cap U_i = \left\{[\frac{x_0}{x_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_i}] \in \mathbb{P}^n_k : f(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) = 0\right\} \overset{\varphi_i}{\cong} \left\{(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{A}^n_k : f_i(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) = 0\right\} =: V(f_i)$.

Fijemos $n = 2$ y $k = \mathbb{C}$ con el fin de obtener $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, el plano proyectivo. Así, consideremos $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo y el conjunto algebraico proyectivo definido por sus ceros $V_+(f) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} : f(x_0, x_1, x_2) = 0\}$. Entonces, como antes, se definen $V(f_i) \cong V_+(f) \cap U_i$ las curvas planas afines descritas por los f_i, $i = 0, 1, 2$. Queremos demostrar que bajo una suposición de no singularidad sobre f, $V_+(f)$ es una superficie de Riemann. Para esto, será necesario enunciar algunos resultados.

Veamos en la siguiente definición cuándo, dado un polinomio homogéneo f, $V_+(f)$ es singular.

Definición 3.6. Un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ es no singular si

$$V_+(f, f_{x_0}, f_{x_1}, f_{x_2}) = \emptyset.$$

Equivalentemente, si $V(f, f_{x_0}, f_{x_1}, f_{x_2}) = \{(0, 0, 0)\}$.

El siguiente resultado será muy importante para la demostración del próximo lema.

Proposición 3.4. *(Fórmula de Euler para polinomios homogéneos) Si $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo, entonces*

$$\deg f \cdot f = \sum_{i=0}^{n} x_i f_{x_i}.$$

Demostración. Como la derivada es un operador lineal, basta demostrar el resultado para un monomio. Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{n} x_i^{\alpha_i}$. Entonces, ya que $x_i f_{x_i} = x_i(\alpha_i x_i^{\alpha_i - 1}) \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j} = \alpha_i f$, tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} x_i f_{x_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \right) f = \deg f \cdot f.$$

□

Enunciaremos ahora el lema previamente referido, de gran importancia para nuestro fin.

Lema 3.1. *Un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ es no singular si y sólo si $V_+(f) \cap U_i \cong V(f_i)$ es una curva plana afín suave para cada $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que alguno de los $V(f_i)$ es singular, a saber, $V(f_0) = \{(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} : f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = 0\}$. Como $V(f_0)$ es singular, existe $(z_0, w_0) = p_0 \in V(f_0, [f_0]_{x_1}, [f_0]_{x_2})$. Entonces, notando que $\deg f \cdot f = x_0 f_{x_0} + x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2}$, esto es, $f_{x_0} = \frac{1}{x_0}(\deg f \cdot f - x_1 f_{x_1} - x_2 f_{x_2})$, tenemos que $\varphi_0^{-1}(p_0) = [1 : z_0 : w_0] \in V_+(f, f_{x_0}, f_{x_1}, f_{x_2})$ pues

$$\begin{aligned}
f[\varphi_0^{-1}(p_0)] &= f_0(p_0) = 0, \\
f_{x_1}[\varphi_0^{-1}(p_0)] &= [f_0]_{x_1}(p_0) = 0, \\
f_{x_2}[\varphi_0^{-1}(p_0)] &= [f_0]_{x_2}(p_0) = 0, \text{ y} \\
f_{x_0}[\varphi_0^{-1}(p_0)] &= (\deg f \cdot f - z_0 f_{x_1} - w_0 f_{x_2})[\varphi_0^{-1}(p_0)] = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, f es singular.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es singular. Entonces existe $[a_0 : a_1 : a_2] = p \in V_+(f, f_{x_0}, f_{x_1}, f_{x_2})$ tal que $a_0 \neq 0$. Entonces $\varphi_0(p) = (\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}) \in V(f_0, [f_0]_{x_1}, [f_0]_{x_2})$ pues

$$\begin{aligned}
f[p] &= f_0(\varphi_0(p)) = 0, \\
f_{x_1}[p] &= [f_0]_{x_1}(\varphi_0(p)) = 0, \text{ y} \\
f_{x_2}[p] &= [f_0]_{x_2}(\varphi_0(p)) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $V(f_0)$ es singular en $\varphi_0(p)$, esto es, alguna de las curvas planas afines es singular. □

Teniendo lo necesario para cumplir nuestro más reciente objetivo, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sea $V_+(f)$ el conjunto algebraico proyectivo definido por los ceros del polinomio homogéneo no singular $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Entonces $V_+(f)$ es una superficie de Riemann compacta.*

Demostración. Como $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ es homogéneo y no singular, cada $V(f_i)$ es una curva plana afín suave irreducible, $i = 0, 1, 2$, y por tanto una superficie de Riemann por la Proposición 3.1. Queremos ver que la estructura de superficie de Riemann de cada $V(f_i)$ induce una estructura de superficie de Riemann en $V_+(f)$. Para esto notemos que, como cada $V(f_i)$ es una superficie de Riemann, para cada $(z_{i_1}, z_{i_2}) = p \in V(f_i)$, $[f_i]_{x_j}(p) \neq 0$, con $i = 0, 1, 2$ y $j = 1, 2$. Este hecho garantiza la existencia de las funciones holomorfas $g_p : N(z_{i_k}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ tal que $V(f_i)|_{N(p)} = \operatorname{graph}(g_p)$ y tenemos las cartas $(\pi^i_{x_j})_p : V(f_i)|_{N(p)} \to \pi_{x_j}(N(p))$ que envían $(z, g_p(z))$ en z o $g_p(z)$, donde el superíndice i en $(\pi^i_{x_j})_p$ hace referencia al dominio $V_+(f) \cap U_i$, $i = 0, 1, 2$. Luego, tomando $\varphi_i^{-1}(p) = q$ y definiendo $\phi_{i_q} := (\pi^i_{x_j})_p \circ \varphi_i : N(q) \to \pi_{x_j}(N(p))$, vemos que ϕ_{i_q} es un homeomofísmo de entre $N(q)$ y $\pi_{x_j}(N(p))$, y la colección $\mathcal{A} = \{\phi_{i_q} : q \in V_+(f)\}$ es una colección de cartas sobre $V_+(f)$. Veamos que las $\phi_{i_q} \in \mathcal{A}$ son compatibles. Sea $[z_0 : z_1 : z_2] = p \in (V_+(f) \cap U_0) \cap (V_+(f) \cap U_1)$, es decir, $z_0, z_1 \neq 0$, y definamos $p_i = \varphi_i(p)$, $i = 0, 1$. Supongamos que $[f_0]_{x_1}(p_0) \neq 0$ y $[f_1]_{x_2}(p_1) \neq 0$. Entonces tenemos las cartas $(\pi^0_{x_1})_{p_0} : N(\frac{z_1}{z_0}) \to \pi_{x_1}(N(\frac{z_1}{z_0}))$ definida por $(z, g_{p_0}(z)) \mapsto z$ y $(\pi^1_{x_2})_{p_1} : N(\frac{z_2}{z_1}) \to \pi_{x_1}(N(\frac{z_2}{z_1}))$ definida por $(w, g_{p_1}(w)) \mapsto g_{p_1}(w)$. Luego, $T_{1_p 0_p} = \phi_{1_p} \circ \phi_{0_p}^{-1}$ envía z en $\frac{g_{p_0}(z)}{z}$, que es holomorfa ya que $z \neq 0$ pues $p = [z_0 : z_1 : z_2]$ es tal que $z_0, z_1 \neq 0$. Explícitamente,

$$z \xrightarrow{(\pi^0_{x_1})^{-1}_{p_0}} (z, g_{p_0}(z)) \xrightarrow{\varphi_0^{-1}} [1 : z : g_{p_0}(z)] \xrightarrow{\varphi_1} \left(\frac{1}{z}, \frac{g_{p_0}(z)}{z}\right) \xrightarrow{(\pi^1_{x_2})_{p_1}} \frac{g_{p_0}(z)}{z}. \tag{1}$$

Por tanto, las cartas son compatibles. Verificaciones similares con las otras posibles combinaciones muestran que $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre $V_+(f)$. Así, hemos hallado una estructura de superficie de Riemann sobre $V_+(f)$. Como subconjunto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $V_+(f)$ es Hausdorff, segundo contable y conexo por la irreducibilidad de f. Además, ya que cada $V(f_i)$ es cerrado en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ y $V_+(f) = \bigcup_{i=0}^2 \varphi_i^{-1}(V(f_i))$, tenemos que $V_+(f)$ es cerrado y por tanto compacto, pues $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ lo es.

Esto muestra que $V_+(f)$ es una superficie de Riemann compacta. Este tipo de superficies de Riemann son llamadas **curvas algebraicas proyectivas suaves** de grado $\deg f$. □

4. Funciones y Formas Sobre Superficies de Riemann

Cuando hemos introducido el concepto de superficie de Riemann, el objetivo principal era identificar espacios topológicos arbitrarios localmente con abiertos del plano complejo por medio de las cartas complejas. En la construcción de la teoría de superficies de Riemann naturalmente se intenta transportar los conceptos y resultados que surgen al análisis complejo en una variable también por medio de las cartas complejas.

Por ejemplo, dada una superficie de Riemann X y una función definida en un punto p de X, para verificar si esta función satisface cierta propiedad en este punto, podemos usar las cartas complejas para transportar la función localmente al plano complejo y verificar la propiedad allí. Sin embargo, notamos que estas propiedades deben ser independientes de los cambios de coordenadas de modo que no sea relevante qué carta se use para verificar la propiedad.

4.1. Funciones Holomorfas

Definición 4.1. Sea X una superficie de Riemann, p un punto de X y f una función definida en una vecindad W de p. Decimos que f es *holomorfa* en p si existe una carta $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$, con $p \in \operatorname{dom} \varphi_\alpha$, tal que $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(p)$. Decimos que f es *holomorfa* en W si es holomorfa en el sentido anterior en cada punto $p \in W$.

Algunas propiedades inmediatas son dadas en el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ un punto y $f : N(p) \to \mathbb{C}$ una función definida en una vecindad de p. Entonces,*

(1) f es holomorfa en p si y sólo si para toda carta $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$ con $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(N(p) \cap \operatorname{dom}\varphi_\alpha) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(p)$.

(2) f es holomorfa en $N(p)$ si y sólo si existe $\{\varphi_\alpha\} \subseteq \mathcal{A}_X$ con $N(p) \subseteq \bigcup_\alpha \operatorname{dom}\varphi_\alpha$, tal que $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(N(p) \cap \operatorname{dom}\varphi_\alpha) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en su dominio para cada α.

(3) Si f es holomorfa en p, f es holomorfa en una vecindad de p.

Demostración.

(1) Sean $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}_X$ con $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi_\beta$. Supongamos que $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(p)$. Entonces $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ T_{\alpha\beta}$ es holomorfa en $\varphi_\beta(p)$, pues es la composición de funciones holomorfas.

(2) Se deduce de (1) teniendo en cuenta que todas las cartas $\{\varphi_\alpha\} \subseteq \mathcal{A}_X$ son compatibles y por tanto sus funciones de transición son biholomorfas.

(3) Si f es holomorfa en p, existe $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$, con $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha$, tal que $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es holormofa en $\varphi_\alpha(p)$. Por esta razón, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ debe ser holomorfa en una vecindad $W \subseteq \operatorname{ran}\varphi_\alpha$ de $\varphi_\alpha(p)$. Así, f es holomorfa en $\varphi_\alpha^{-1}(W)$, una vecindad de p.

$\square$

A continuación, presentaremos ejemplos de funciones holomorfas sobre las superficies de Riemann que hemos mencionado en secciones anteriores.

Ejemplo 4.1. Sea $f : N(\infty) \subset \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ una función sobre la esfera de Riemann definida en una vecindad de ∞. Recordemos que la estructura compleja de la esfera de Riemann consiste únicamente de dos cartas complejas y su función de transición T_{10} envía z en $\frac{1}{z}$. Así, por el ítem (1) del Lema 4.1, $f(z)$ es holomorfa en ∞ si y sólo si $f(\frac{1}{z})$ es holomorfa en $z = 0$. Explícitamente, si f es holomorfa en ∞, tenemos que $f \circ \varphi_1^{-1}$ debe ser holomorfa en una vecindad V de $\varphi_1(\infty)$. Luego, por el Lema 4.1, si f es holomorfa en $z \in V$, $f \circ \varphi_1^{-1} \circ T_{10} = f \circ \varphi_0^{-1}$ debe ser holormofa en $\frac{1}{z}$. Así, f necesariamente debería ser holomorfa en $z = 0$. En particular, si f es una función racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, entonces f es holomorfa en ∞ si y sólo si $\deg p \leq \deg q$.

Ejemplo 4.2. Consideremos la recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, y sean $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ polinomios homogéneos del mismo grado tal que $(z_0, w_0) \notin V(q)$. Sea $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ definida por $[z : w] \mapsto \frac{p(z,w)}{q(z,w)}$. Puesto que p, q son polinomios, ambos son holomorfos en (z_0, w_0), y como $(z_0, w_0) \notin V(q)$, tenemos que $\|\frac{p(z_0,w_0)}{q(z_0,w_0)}\| < \infty$. Luego, a lo más f tendrá una singularidad removible en $[z_0 : w_0]$, esto es, f es holomorfa en $[z_0 : w_0]$ y por tanto en una vecindad W de $[z_0 : w_0]$ por el Lema 4.1.

Ejemplo 4.3. Consideremos ahora el toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$ con su proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$. Hemos visto en la construcción como superficie de Riemann la función de transición entre sus cartas era de la forma $T(z) = z + k$, $k \in \mathbb{C}$ constante. Como definición, dado un punto $p \in \mathbb{C}/\Lambda$, diremos que una función $g : N(p) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en p si existe una preimagen $z \in \mathbb{C}$ de p tal que $g \circ \pi$ es holomorfa en z. Además, g será holomorfa en $W \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$ si es holomorfa en cada punto de W si $g \circ \pi$ es holomorfa en $\pi^{-1}(W)$.

Ejemplo 4.4. Sea $f \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio y consideremos su conjunto algebraico $V(f)$. Es inmediato que las proyecciones de las coordenadas z y w son funciones holomorfas sobre $V(f)$. Además, dado $g \in \mathbb{C}[z, w]$ otro polinomio, tenemos que $\operatorname{dom} g \mid_{V(f)}$ es una función holomorfa sobre $V(f)$ pues todo polinomio es una función holomorfa.

Ejemplo 4.5. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio homogéneo no singular y consideremos su conjunto algebraico proyectivo $V_+(f)$. Sea $p = [x_0 : y_0 : w_0] \in V_+(f)$ un punto tal que $x_0 \neq 0$. Entonces, los cocientes $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ son funciones holomorfas en p ya que estas corresponden a la proyección de las coordenadas en $\varphi_0(N(p) \cap U_0)$, $N(p) \subseteq V_+(f)$ una vecindad de p. Además, análogo al ejemplo anterior, cualquier polinomio $g \in \mathbb{C}[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}]$ restringido a $\varphi_0(N(p) \cap U_0)$ es una función holomorfa en p. Notemos que este polinomio g puede ser escrito como su homogenización $G(x, y, z)/x^{\deg g}$. Más generalmente, si $G, H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ son polinomios homogéneos del mismo grado d, donde H es un polinomio que no se anula en p, entonces el cociente G/H es una función holomorfa sobre $V_+(f)$ en p.

Es posible generalizar el ejemplo anterior de inmediato para las curvas de intersección localmente completas suaves.

Ejemplo 4.6. Sean $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una curva de intersección localmente completa suave y $H, G \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomios homogéneos del mismo grado d tal que H no se anula en $p \in X$. Sea $f : N(p) \to C$ definida por $[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto \frac{G(x_0, \ldots, x_n)}{H(x_0, \ldots, x_n)}$. Entonces f es holomorfa sobre X en p; esto es, el cociente G/H es una función holomorfa sobre X en p.

Ahora, consideremos la siguiente definición.

Definición 4.2. Sea $W \subseteq X$ un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X. Se denota por

$$\mathcal{O}_X(W) := \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}$$

al conjunto de todas las funciones holomorfas sobre W (y $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_X(X)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas sobre todo X).

Notamos que mediante el morfismo de anillos $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}_X(W)$, $W \subseteq X$ abierto, $\mathcal{O}_X(W)$ es una $\mathbb{C}-$álgebra. Esto será de suma relevancia en lo que procede.

4.2. Funciones Meromorfas

En la demostración del primer ítem del Lema 4.1 vimos, en particular, que podemos usar las cartas de una superficie de Riemann para verificar si alguna función f es holomorfa. Podemos usar de manera similar las cartas para definir las nociones de singularidad removible, polo y singularidad esencial. Es decir, si f es una función definida y holomorfa en una vecindad puntuada de $p \in X$, $N(p) - \{p\}$, f tiene cierta propiedad en p si y sólo si $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ satisface esta propiedad en $\varphi_\alpha(p)$, para cada $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$ tal que $p \in \operatorname{dom} \varphi_\alpha$. Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3. Sea f una función holomorfa en una vecindad puntuada de $p \in X$.

(1) Decimos que f tiene una *singularidad removible* en p si y sólo si existe $\varphi \in \mathcal{A}_X$, con $p \in \operatorname{dom} \varphi$, tal que $f \circ \varphi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\varphi(p)$.

(2) Decimos que f tiene un *polo* en p si y sólo si existe $\varphi \in \mathcal{A}_X$, con $p \in \operatorname{dom} \varphi$, tal que $f \circ \varphi^{-1}$ tiene un polo en $\varphi(p)$.

(3) Decimos que f tiene un *singularidad esencial* en p si y sólo si existe $\varphi \in \mathcal{A}_X$, con $p \in \operatorname{dom}\varphi$, tal que $f \circ \varphi^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\varphi(p)$.

Sin embargo, es posible caracterizar estos tipos de singularidad de manera independiente a las coordenadas locales. Así, sea f una función definida y holomorfa en una vecindad puntuada de $p \in X$, con X una superficie de Riemann. Entonces el tipo de singularidad de f en p puede caracterizarse investigando el comportamiento de f alrededor de p. Explícitamente, sea X una superficie de Riemann, $N(p) - \{p\} = U \subset X$ una vecindad puntuada de $p \in X$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre U. Entonces:

(1) La singularidad de f en p es removible si y sólo si $\lim_{x \to p} |f(x)|$ existe y es finito.

(2) Si $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$, entonces f tiene un polo en p.

(3) Si $\lim_{x \to p} |f(x)|$ no existe, entonces f tiene una singularidad esencial en p.

Lo mencionado hasta ahora nos permite al fin enunciar la definición de función meromorfa sobre una superficie de Riemann.

Definición 4.4. Una función f sobre una superficie de Riemann X es meromorfa en un punto $p \in X$ si esta es holomorfa, tiene una singularidad removible, o tiene un polo en p. Decimos que f es meromorfa en $W \subseteq X$ si esta es meromorfa en cada punto $p \in W$.

4.2.1. Series de Laurent

Uno de los conceptos fundamentales es el de orden de una función en un punto, que enunciaremos a continuación. Para ello, necesitamos introducir las series de Laurent de una función sobre una superficie de Riemann.

Definición 4.5. Sea X una superficie de Riemann, $N(p) - \{p\} = U \subset X$ una vecindad puntuada de $p \in X$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función definida en U. Sea $\varphi \in \mathcal{A}_X$ una carta de X tal que $p \in \operatorname{dom}\varphi$ y $\varphi(p) = z_0$. Entonces $f(\varphi^{-1}(z)) : \varphi(\operatorname{dom}\varphi \cap U) \to \mathbb{C}$ tiene una *serie de Laurent*

$$f(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n.$$

Los coeficientes c_n son llamados *coeficientes de Laurent* y dependen de la elección de coordenadas locales.

Con esto presente, podemos definir el concepto de orden.

Definición 4.6. Sea X una superficie de Riemann y f una función meromorfa en $p \in X$ tal que su serie de Laurent es $f(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$, para alguna carta $\varphi \in \mathcal{A}_X$ con $\varphi(p) = z_0$. Definimos el *orden de f en p*, denotado por $ord_p(f)$, como

$$ord_p(f) = \min \{n \mid c_n \neq 0\}.$$

Dada esta definición, debemos verificar que esta no depende de la elección de la carta.

Proposición 4.1. *El orden de una función sobre una superficie de Riemann en un punto es independiente de las coordenadas locales.*

Demostración. Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$ un punto. Supongamos que $\varphi(x) = z$ es una coordenada local de X cerca a p y $z_0 = \varphi(p)$. Supongamos además que $f \circ \varphi^{-1}(z) = c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \sum_{n>n_0} c_n(z - z_0)^n$ es la serie de Laurent f alrededor de p en términos de la coordenada z, con $c_{n_0} \neq 0$, de modo que $ord_p(f) = n_0$. Ahora, sea $\psi \in \mathcal{A}_X$ una carta de X tal que $p \in \operatorname{dom}\psi$ y $w_0 = \psi(p)$. Así, para todo $z \in \psi(\operatorname{dom}\psi \cap \operatorname{dom}\varphi)$, tenemos que $z = z_0 + \sum_{n\geq 1} b_n(w - w_0)^n$, donde $b_1 \neq 0$. Como $z - z_0 = b_1(w - w_0)^1 + \sum_{n>1} b_n(w - w_0)^n$, componiendo con la serie de Laurent tenemos que $c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \sum_{n>n_0} c_n(z - z_0)^n = c_{n_0}a_1(w - w_0)^{n_0} + \sum_{n>n_0} c_n(z - z_0)^n +$ (términos de orden mayor). Luego, ya que ambos c_{n_0} y b_1 son no nulos, el primer término de la derecha de la igualdad es no nulo y el orden de f calculado por medio de la coordenada w es n_0. Por tanto, el orden de f en p está bien definido y es independiente de las coordenadas locales. □

En base a esto, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Sea f una función meromorfa en $p \in X$, con X una superficie de Riemann. Entonces,*

(1) f es holomorfa si y sólo si $ord_p(f) \geq 0$,

(2) f no tiene ni un polo ni un cero en p si y sólo si $ord_p(f) = 0$, y

(3) f tiene un polo en p si y sólo si $ord_p(f) < 0$.

Demostración. Sea $\varphi(p) = z_0$ y $f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ la serie de Laurent de f en p. Como f es meromorfa en p, $f \circ \varphi^{-1}$ también lo es en $\varphi(N(p) \cap \operatorname{dom}\varphi)$, de modo que o $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en z_0, o tiene un polo en z_0, o tiene una singularidad removible. Teniendo esto en cuenta,

(1)-(2) Si $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en z_0, su serie de potencias alrededor de z_0 coincide con la serie de Laurent, es decir, $f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$, donde $a_n \neq 0$ para algún $n \geq 0$, de modo que $ord_p(f) \geq 0$. La implicación contraria es inmediata. En este caso también es fácil ver que se satisface que $f(p) \neq 0$ si y sólo si $ord_p(f) = 0$ y, de forma análoga, es claro que el segundo ítem se satisface.

(3) Sea $j = f \circ \varphi^{-1}$. Si z_0 es un polo de j, entonces, tomando $g = 1/j$, vemos que g está bien definida y $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. Esto implica que g es holomorfa en una vecindad $N(z_0)$ de z_0. Puesto que g es holomorfa en esta vecindad, podemos encontrar una función holomorfa h tal que $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, con $h(z_0) \neq 0$, donde $k \geq 1$. Como h es holomorfa en $N(z_0)$ y es no nula en z_0, podemos encontrar una vecindad $U \subseteq N(z_0)$ donde h es no nula. De este modo, $1/h$ es holomorfa en U y podemos escribir $\frac{1}{h}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$. Así, en cada punto $z \in U - \{z_0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} j(z) &= \frac{1}{g(z)} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k h(z)} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n\geq -k} a_{n+k}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

Como $k \geq 1$, tenemos que $ord_{z_0}(j) < 0$. Por tanto, $ord_p(f) < 0$.

Recíprocamente, si p es un polo de f de orden $m < 0$, entonces z_0 es un polo de j y tenemos que $g(z) = j(z)(z - z_0)^m$ es holomorfa. Así $\lim_{z\to z_0} j(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \infty$. Luego, j tiene un polo en z_0. Por tanto, f tiene un polo en p.

Decimos que f tiene un cero de orden n en p si $ord_p(f) = n \geq 1$. Análogamente, decimos que f tiene un polo de orden n en p si $ord_p(f) = -n < 0$. Un cero o polo de orden 1 es llamado simple, respectivamente. □

Hemos mencionado previamente que el orden de una función en un punto da información acerca del comportamiento de la función alrededor de dicho punto. Un resultado más fuerte es dado a continuación.

Lema 4.3. *Sea X una superficie de Riemann y $U \subset X$ una vecindad puntuada de $p \in X$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función con una singularidad en p. Entonces,*

(1) p es singularidad removible si y sólo si $ord_p(f) \geq 0$,

(2) p es polo si y sólo si $ord_p(f) < 0$ y,

(3) p es singularidad esencial si y sólo si $ord_p(f) = -\infty$.

De manera análoga en que se demostraron los ítem *(1)* y *(3)* del Lema 4.2 se demuestran los ítem *(1)* y *(2)* del Lema anterior, respectivamente.

El siguiente resultado da algunas propiedades claves de la función orden.

Lema 4.4. *Sean f, g funciones meromorfas en $p \in X$ que son no nulas. Entonces:*

(1) $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$.

(2) $ord_p(1/f) = -ord_p(f)$.

(3) $ord_p(c \cdot f) = ord_p(f)$, $c \in \mathbb{C}^*$.

(4) $ord_p(f + g) \geq \min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$. En este caso, $ord_p(f + g) = \min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$ si $ord_p(f) \neq ord_p(g)$.

Demostración.

(1) Sean $c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \sum_{n \geq n_0} c_n(z - z_0)^n$ y $b_{n'_0}(z - z_0)^{n'_0} + \sum_{n \geq n'_0} b_n(z - z_0)^n$ las series de Laurent para f y g alrededor de $z_0 = \varphi(p)$, con $\varphi \in \mathcal{A}_X$ una carta tal que $p \in \operatorname{dom} \varphi$, de modo que $ord_p(f) = n_0$ y $ord_p(g) = n'_0$. Como estas series son idénticas a las funciones alrededor de z_0, vemos que, en alguna vecindad de z_0, su producto coincide con el producto de las series

$$\begin{aligned} fg \circ \varphi^{-1}(z) &= (c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \cdots)(b_{n'_0}(z - z_0)^{n'_0} + \cdots) \\ &= c_{n_0} b_{n'_0}(z - z_0)^{n_0 + n'_0} + \cdots \end{aligned}$$

De este modo, vemos que $ord_p(fg) = n_0 + n'_0$.

(2) Notemos que si f es meromorfa en p, entonces también lo es $1/f$. De esta forma, si f es holomorfa en p y $f(p) \neq 0$, $1/f$ será holomorfa en p y $1/f(p) \neq 0$, y $ord_p(f) = ord_p(1/f) = 0$ por el Lema 4.2. Por otro lado, si p es un cero de f de orden $m > 0$, entonces existe una función h definida y holomorfa en una vecindad de z_0 tal que $f \circ \varphi^{-1}(z) = (z - z_0)^m h(z)$. Así, al considerar la serie de Taylor para h alrededor de z_0 en la expresión anterior, notamos que $1/f$ tiene un polo de orden $-m$ en p. Luego, $ord_p(f) = -ord_p(1/f)$.

(3) Dada la linealidad de la suma, esta afirmación es evidente.

(4) Supongamos que $a_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \sum_{n > n_0} a_n(z - z_0)^n$ y $b_{m_0}(z - z_0)^{m_0} + \sum_{n > m_0} a_n(z - z_0)^n$ son las series de Laurent para f y g alrededor de $z_0 = \varphi(p)$, de modo que $ord_p(f) = n_0$ y $ord_p(g) = m_0$ calculados vía la coordenada local z. Si $n_0 = m_0$, podría ocurrir que $a_{n_0} = -b_{m_0}$ y tendríamos $ord_p(f + g) > \min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$. Si no es el caso, se satisface la igualdad, al igual que el caso cuando $n_0 \neq m_0$.

□

Como en el caso de las funciones holomorfas, consideremos la siguiente definición.

Definición 4.7. Sea $W \subseteq X$ un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X. Se denota por

$$\mathcal{M}_X(W) := \{f : W \to \mathbb{C} : f \ \textit{es meromorfa}\}$$

al conjunto de todas las funciones meromorfas sobre W (y $\mathcal{M}_X := \mathcal{M}_X(X)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas sobre todo X).

Por el mismo argumento del morfismo de anillos dado por la inclusión $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}_X(W)$, $W \subseteq X$ abierto, $\mathcal{M}_X(W)$ es una $\mathbb{C}-$álgebra.

4.3. 1-Formas Holomorfas y Meromorfas

En $\mathbb{C}$, definimos el espacio tangente a $p \in \mathbb{C}$, denotado $\mathbb{C}_p$, como el conjunto de puntos anclados en $p \in \mathbb{C}$, esto es,

$$\mathbb{C}_p = \{z_p := z - p : z \in \mathbb{C}\}.$$

Este es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{C}$. Una base para $\mathbb{C}_p$ es $\{1_p\}$ y $\{(dz)_p\}$ es su dual en $(\mathbb{C}_p)^*$, pues $(dz)_p(1) = 1$.

Definición 4.8. Un campo de formas lineales (o una forma exterior de grado 1) en $\mathbb{C}$ es una aplicación ω que asocia a cada $p \in \mathbb{C}$ un elemento $\omega(p) \in (\mathbb{C}_p)^*$. Esta puede ser escrita como

$$\omega(p) = f(p)(dz)_p \text{ o}$$
$$\omega = f \ dz,$$

donde f es una función de valor complejo en $\mathbb{C}$. Si f es holomorfa en $U \in \tau_{\mathbb{C}}$, ω es llamada una *1-forma holormofa* en U. Si f es una función meromorfa en $U \in \tau_{\mathbb{C}}$, ω es llamada una *1-forma meromorfa* en U.

En este caso, decimos que estas $1-$formas están en la coordenada z. Queremos transportar estos objetos a las Superficies de Riemann. Para esto, necesitamos una noción de compatibilidad.

Definición 4.9. Sean $\omega_1 = f(z)dz$ una $1-$forma holomorfa (meromorfa) en $V_1 \in \tau_{\mathbb{C}}$ en la coordenada z y $\omega_2 = g(w)dw$ una $1-$forma holomorfa (meromorfa) en $V_2 \in \tau_{\mathbb{C}}$ en la coordenada w. Sea $T : V_2 \to V_1$ una aplicación holomorfa, esto es, $z = T(w)$. Decimos que ω_1 se transforma a ω_2 bajo T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Con esto presente, tenemos la definición de $1-$forma sobre una superficie de Riemann.

Definición 4.10. Sea $X \in \mathcal{RS}$. Una $1-$forma holomorfa (meromorfa) sobre X es una colección $\{\omega_\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_X\}$ de $1-$formas holomorfas (mero) tal que si $\operatorname{dom} \varphi_i \cap \operatorname{dom} \varphi_j \neq \emptyset$, entonces la $1-$forma holomorfa (meromorfa) asociada ω_{φ_i} se transforma a ω_{φ_j} bajo el cambio de coordenadas $T_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$.

Para definir una $1-$forma holormofa (meromorfa) sobre una superficie de Riemann, no necesitamos definir una $1-$forma holomorfa (meromorfa) en el rango de cada carta sobre la superficie pues basta definir la $1-$forma holomorfa (meromorfa) sobre algún atlas sobre la superficie. Tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 4, Sec 1, Lema 1,4).

Lema 4.5. *Sea $X \in \mathcal{RS}$ y $\mathcal{A}$ un atlas complejo sobre X. Supongamos que $1-$formas holomorfas (meromorfas) compatibles son definidas para cada carta de $\mathcal{A}$, esto es, estas se transforman en los dominios comunes. Entonces existe una única $1-$ holomorfa (meromorfa) extendiendo estas $1-$formas holomorfas (meromorfas) en cada una de las cartas de $\mathcal{A}$.*

Denotamos por $\Omega_X(U)$ al $\mathbb{C}-$espacio vectorial de $1-$formas holomorfas sobre $U \in \tau_X$ y $\mathcal{M}_X^{(1)}(U)$ al $\mathbb{C}-$espacio vectorial de todas las $1-$formas meromorfas sobre $U \in \tau_X$.

Sea $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}(U)$, U una vecindad de $p \in X$. Sea $\varphi \in \mathcal{A}_X$ centrada en p y escribamos $\omega = f(z)dz$, donde es una función meromorfa en $z = 0$.

Definición 4.11. El orden de ω en p, denotado $ord_p(\omega)$, es $ord_0(f)$.

Este orden es independiente de la elección de coordenadas, de modo que está bien definido.

5. Divisores Sobre Superficies de Riemann

Los divisores sobre variedades son poderosas herramientas que permiten describir $\mathcal{M}_X$. En superficies de Riemann, uno de sus primeros enfoques es organizar ceros y polos de sus funciones meromorfas.

Definición 5.1. Sea $X \in R\mathcal{S}$ y $D \in \mathbb{Z}^X$. Se define el *soporte* de D, denotado $\operatorname{supp}(D)$, como

$$\operatorname{supp}(f) = \{p \in X : D(p) \neq 0\} \subseteq X.$$

Con la suma puntual, $\mathbb{Z}^X$ tiene estructura de grupo abeliano.

Definición 5.2. Un divisor sobre X es una función $D \in \mathbb{Z}^X$ tal que $\operatorname{supp}(D) \subset X$ es discreto. Se denota por $\operatorname{Div}(X)$ al subgrupo de todos los divisores sobre X.

Notemos que si X es compacta, $D \in \operatorname{Div}(X)$ implica que $\operatorname{supp}(D)$ es finito. Consideremos el grupo abeliano libre

$$\left\{\sum_{p \in X} n_p \cdot p : n_p \in \mathbb{Z}\right\},$$

con base los puntos de X. Podemos identificar cada $D \in \operatorname{Div}(X)$ con la suma formal

$$\sum_{p \in X} D(p) \cdot p,$$

obteniendo así un isomorfismo de grupos. Esto es, si $D \in \operatorname{Div}(X)$, tenemos que $D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$. Con esta notación, tenemos lo siguiente.

Definición 5.3. Sea $\deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo de grupos definido por

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p \mapsto \deg(D) = \sum_{p \in X} D(p)$$

Se define el grado de $D \in \operatorname{Div}(X)$ como el entero $\deg(D)$.

Denotamos por $\operatorname{Div}_0(X) := \ker(\deg)$. Ahora, dada una función meromorfa $f \in \mathcal{M}_X$, definimos el divisor de f como

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} ord_p(f) \cdot p.$$

Cualquier divisor sobre X de esta forma es llamado un **divisor principal** sobre X. El conjunto de todos los divisores principales sobre X es denotado por $\operatorname{PDiv}(X)$, un subgrupo de $\operatorname{Div}(X)$ por el Lema 4.4. Cuando X es compacta, tenemos que $\operatorname{PDiv}(X) \leq \operatorname{Div}_0(X)$.

Definición 5.4. Sea $f \in \mathcal{M}_X$. Se definen el divisor de ceros de f como

$$\text{div}_0(f) = \sum_{\{p \in X : ord_p(f) > 0\}} ord_p(f) \cdot p$$

y el divisor de polos de f como

$$\text{div}_\infty(f) = \sum_{\{p \in X : ord_p(f) < 0\}} -ord_p(f) \cdot p.$$

Estos elementos de $\text{Div}(X)$ son divisores con soporte disjunto y

$$\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f).$$

En $\text{Div}(X)$ definimos la relación "$\geq$" como $D \geq 0$ si $D(p) \geq 0$ para todo $o \in X$. Esta es una relación de orden que da un ordenamiento parcial de divisores sobre X. De esta relación, decimos que $D > 0$ si $D \geq 0$ y $D \neq 0$ y $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2 \geq 0$, esto es, $D = P - N$, con $P, N \in \text{Div}(X)$ no negativos con soporte disjunto.

Con esto presente, de la Definición 5.4 tenemos que $\text{div}(f)$ se puede escribir como la diferencia de dos divisores no negativos con soporte disjunto, para $f \in \mathcal{M}_X$. De hecho, cualquier divisor $D \in \text{Div}(X)$ se puede escribir de esta forma.

Más aún, podemos definir en $\text{Div}(X)$ una relación de equivalencia fundamental que nos permitirá ordenar funciones meromorfas sobre superficies de Riemann.

Definición 5.5. Sea $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Decimos que D_1 es linealmente equivalente con D_2, denotado $D_1 \sim D_2$, si y sólo si $D_1 - D_2 \in \text{PDiv}(X)$, esto es, $D_1 = D_2 + \text{div}(f)$, con $f \in \mathcal{M}_X$.

Lema 5.1. *Sea $X \in \mathcal{M}_X$. Entonces,*

(1) La equivalencia lineal de divisores es una relación de equivalencia en $Div(X)$.

(2) $D \sim 0$ si y sólo si $D \in PDiv(X)$.

(3) Si X es compacta, $D_1 \sim D_2$ implica que $\deg(D_1) = \deg(D_2)$, para $D_1, D_2 \in Div(X)$.

Ahora, sea $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$. Se define el divisor de ω como

$$\text{div}(\omega) = \sum_{p \in X} ord_p(\omega) \cdot p.$$

Cualquier divisor de esta forma es llamado **divisor canónico** sobre X. El subgrupo de todos los divisores canónicos sobre X se denota $\text{KDiv}(X)$. Notemos que si $f \in \mathcal{M}_X$ y $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$, tenemos que $\text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega)$. De este modo, tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 1, Lema 1,12).

Lema 5.2. *Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$, con $X \in \mathcal{RS}$. Entonces, existe una única $f \in \mathcal{M}_X$ tal que $\omega_1 = f\omega_2$.*

De este resultado, se tiene el siguiente corolario (ver [Mir95], Cap 5, Sec 1, Corolario 1,13).

Corolario 5.1. *$KDiv(X)$ es una clase lateral del subgrupo $PDiv(X)$, esto es,*

$$KDiv(X) = div(\omega) + PDiv(X),$$

con $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$.

Respecto al grado de los divisores canónicos, tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 1, Proposición 1,14).

Proposición 5.1. *Si $X \in \mathcal{RS}$ es compacta y $\mathcal{M}_X - \{0\}$ tiene al menos un elemento, entonces existe $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}$ tal que el divisor canónico $div(\omega) \in KDiv(X)$ tiene grado $2g - 2$, con g el género de X.*

5.1. Cadenas y Homología

En las superficies de Riemann también podemos definir grupos de homología.

Definición 5.6. Un camino en X es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$, donde $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son los puntos finales de γ. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ es un camino cerrado.

Sea $\gamma : [a,b] \to X$ un camino en X y consideremos una partición $P = \{a_1 = a, \ldots, a_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$. Decimos que γ es suave por partes si $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to X$ es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$.

Definición 5.7. Una cadena en X es una suma formal

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \gamma_i,$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y γ_i es un camino en X.

Sea $\mathrm{CH}(X)$ el conjunto de todas las cadenas en X. Este es un grupo abeliano libre con base $\mathcal{C} = \{\gamma_i : \gamma_i \text{ es un camino en } X\}$.

Supongamos que cada camino en X está definido en $[0,1]$. Consideremos el homomorfismo de grupos $\partial : \mathrm{CH}(X) \to \mathrm{Div}(X)$ definido por

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \gamma_i \mapsto \partial_\gamma = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot (\gamma_i(1) - \gamma_i(0)).$$

Notemos que $\mathrm{CLCH}(X) := \ker(\partial)$ es el conjunto de todas las cadenas tal que el punto final de un camino se anula con el punto inicial de otro, para cada camino en la cadena, esto es, el subgrupo de todas las cadenas cerradas en X. Ahora, dado $A \subseteq X$ triangulable, ∂_A es una cadena cerrada. Tomando $\mathcal{D} = \{A \subseteq X : A \text{ es triangulable}\}$, el subgrupo generado por $\{\partial_A : A \in \mathcal{D}\}$ es denotado por BCH(X).

Definición 5.8. El cociente $\mathrm{CLCH}(X)/\mathrm{BCH}(X)$ es llamado el *primer grupo de homología* de X y es denotado como $H_1(X)$.

5.2. Espacios de Funciones y Formas Asociados a Divisores

Veremos cómo los divisores pueden ser usados para ordenar funciones meromorfas. Antes de ello, definimos $ord_p(f) = \infty$ si $f|_{N(p)} \equiv 0$, con $N(p) \subset X$ una vecindad de p.

Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$, con $X \in \mathcal{RS}$.

Definición 5.9. El espacio de funciones meromorfas con polos acotados por D, denotado por $L(D)$, al $\mathbb{C}-$espacio vectorial

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}_X : \mathrm{div}(f) \geq -D\}.$$

Notemos que si $D_1 \leq D_2$, entonces cualquier función $f \in \mathcal{M}_X$ con polos acotados por D_1 tiene polos acotados por D_2, esto es, $D_1 \leq D_2$ implica que $L(D_1) \subseteq L(D_2)$. Además, tenemos que $L(0) = \mathcal{O}_X$ y, si $X \in \mathcal{RS}$ es compacta, tenemos que $L(0) = \mathbb{C}$.

Recordemos que, dado un $K-$espacio vectorial V, la proyectivización de V, denotado por $\mathbb{P}(V)$, es el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 en V.

Definición 5.10. Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$, con $X \in \mathcal{RS}$. El sistema lineal completo de D, denotado por $|D|$, se define como

$$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(X) : E \sim D \text{ y } E \geq 0\}.$$

Hay una estructura geométrica/algebraica en un sistema completo $|D|$ que está relacionada con el $\mathbb{C}-$espacio vectorial $L(D)$. Para notar esto, consideremos la función

$$s : \mathbb{P}(L(D)) \to |D|$$

definida por $\text{span}(f) \mapsto \text{div}(f) + D$, donde $\text{span}(f) = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Ya que $\text{div}(\lambda f) = \text{div}(f)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, s está bien definida. Tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 3, Lema 3,7).

Lema 5.3. *Si $X \in \mathcal{RS}$ es compacta, la función s es biyectiva.*

Cualquier subconjunto $A \subseteq |D|$ es llamado un sistema lineal y $s^{-1}(A) \subseteq \mathbb{P}(L(D))$ es llamado un subespacio lineal. Recordemos que, en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, la variedad proyectiva $V_+(a_0x_0 + \cdots + a_nx_n)$ es llamado un subespacio lineal de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Esto nos da una correspondencia entre sistemas lineales en $|D|$ y subespacios lineales en $\mathbb{P}(L(D))$. La dimensión de un sistema lineal $A \subseteq |D|$ es la dimensión del subespacio lineal $s^{-1}(D) \subseteq \mathbb{P}(L(D))$.

Tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 3, Proposición 3,8).

Proposición 5.2. *Sean $D_1, D_1 \in Div(X)$ linealmente equivalente, esto es, $D_1 = D_2 + div(h)$, con $h \in \mathcal{M}_X - \{0\}$. Entonces $\mu_h : L(D_1) \to L(D_2)$ definida por $f \mapsto hf$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales. En particular, si $D_1 \sim D_2$, entonces* $\dim L(D_1) = \dim L(D_2)$.

Los construcciones realizadas para funciones meromorfas puede ser pensado para $1-$formas meromorfas.

Definición 5.11. El espacio de $1-$formas meromorfas con polos acotados por D, $D \in \text{Div}(X)$, es el $\mathbb{C}-$espacio vectorial

$$L^{(1)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}_X : \text{div}(\omega) \geq -D\}.$$

Notemos que

$$L^{(1)}(0) = \{1 - \text{formas holomorfas}\} = \Omega^{(1)}(X).$$

Análogo a la Proposición 5.2, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Sean $D_1, D_2 \in Div(X)$ linealmente equivalentes, es decir, $D_1 = D_2 + div(h)$. Entonces $\mu_h : L^{(1)}(D_1) \to L^{(1)}(D_2)$ definida por $\omega \mapsto h\omega$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales. En particular, nuevamente, si $D_1 \sim D_2$, entonces* $\dim L^{(1)}(D_1) = \dim L^{(1)}(D_2)$.

Existe una importante relación los espacios $L^{(1)}(D)$ y $L(D + K)$. Sea $D \in \text{Div}(X)$ y $\text{div}(\omega) = K \in \text{KDiv}(X)$, con $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}_X$. Entonces la aplicación $\mathbb{C}-$lineal

$$\begin{aligned} \mu_\omega : L(D + K) &\to L^{(1)}(D) \\ f &\mapsto f\omega \end{aligned}$$

es un isomorfismo. En particular, $\dim L(D + K) = \dim L^{(1)}(D)$ (ver [Mir95], Cap 5, Sec 3, Lema 3,11).

Más aún, estos $\mathbb{C}-$espacios vectoriales son finitamente generados. Si bien no podemos conocer la dimensión exacta de estos en todos los casos, podemos saber una cota superior para esta dimensión. Tenemos el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 3, Lema 3,5).

Lema 5.4. *Sea $D \in Div(X)$ y $p \in X$. Entonces $L(D - p) = L(D)$ o $L(D - p)$ tiene codimensión 1 en $L(D)$.*

A partir de este resultado, y asumiendo que $X \in \mathcal{RS}$ es compacta, podemos hallar una cota para la dimensión de $L(D)$. Esto se resume en el siguiente resultado (ver [Mir95], Cap 5, Sec 3, Proposición 3,16).

Proposición 5.4. *Sea $X \in \mathcal{RS}$ compacta y $D \in Div(X)$. Entonces $L(D)$ es una $\mathbb{C}-$espacio vectorial finito dimensional. Escribiendo $D = P - N$, con $P, N \in Div(X)$ divisores no negativos con suporte disjunto, tenemos que* $\dim L(D) \leq 1 + \deg(P)$. *Si $D \geq 0$, entonces* $\dim L(D) \leq 1 + \deg(D)$.

6. Haces y Prehaces

Los haces y prehaces sobre espacios topológicos tienen como uso principal conocer las funciones que satisfacen condiciones locales en un punto.

Definición 6.1. Sea $M \in \text{Top}$ un espacio topológico. Un prehaz $\mathcal{F}$ (de grupos abelianos) sobre M es una colección de grupos abelianos $\mathscr{F}(U)$, $U \in \tau_M$, y una colección de homomorfismos

$$\rho_{VU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$

siempre que $V \subseteq U$, tal que:

(1) $\mathscr{F}(\emptyset) = \{e\}$, donde $\{e\}$ es el grupo trivial de un solo elemento.

(2) $\rho_{UU} = id_{\mathscr{F}(U)}$.

(3) Si $W \subseteq V \subseteq U$, entonces $\rho_{WU} = \rho_{VU} \circ \rho_{VW}$.

Esto es, $\mathscr{F} : \text{Top} \to \text{Grp}$ es un functor contravariante satisfaciendo *(1) y (2)* tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{VU}"'] \arrow[dd, bend left, "\rho_{WU}"] \\
V \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "\rho_{WV}"'] \\
W \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathscr{F}(W)
\end{tikzcd}$$

es compatible.

Las aplicaciones ρ_{UV} son llamadas *aplicaciones restricción* para el prehaz. Los elementos de $\mathscr{F}(U)$ son llamados *secciones* sobre X.

Notemos que todas las propiedades locales comunes (continuidad, diferenciabilidad, etc) que se satisfacen en un punto, se satisfacen en algún abierto conteniendo este punto. Supongamos que $\mathcal{P}$ es una propiedad que está definida inicialmente en puntos, esto es, f definida en una vecindad de p satisface la propiedad $\mathcal{P}$ en p si algunas condiciones para f se satisfacen p. Extendemos esta definición para subconjuntos afirmando que una función f satisface la propiedad $\mathcal{P}$ se satisface para cada punto del subconjunto.

En este caso, siempre obtenemos un prehaz ya que si f satisface $\mathcal{P}$ en V y $U \subseteq V$, entonces f satisface la propiedad $\mathcal{P}$ en U.

Ejemplo 6.1. Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Definimos $G^X = \{G^X(U) : \emptyset \neq U \in \tau_X\}$, con $G^X(U) = \{f : U \to G : f \text{ es función}\}$. Entonces G^X es un prehaz sobre X si tomamos en $G^X(U)$ la estructura de grupo dada por la por la multiplicación puntual, consideramos $G^X(\emptyset) = \{e\}$ como el grupo trivial de un elemento y definimos $\rho_{VU}(f) = f|_V \in G^X(V)$, dado $V \subseteq U$.

En este ejemplo no hemos impuesto condiciones sobre las funciones definidas en los abiertos de espacio topológico. Luego, no se respeta la estructura del espacio topológico.

Por las observaciones hechas anteriormente, los siguientes también son ejemplos de prehaz.

Ejemplo 6.2. Sea $X \in \mathcal{RS}$.

- $\mathcal{C}^\infty_X = \{\mathcal{C}^\infty_X(U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{C}^\infty_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ es } \mathcal{C}^\infty \text{ en } U\}$.

- $\mathcal{O}_X = \{\mathcal{O}_X(U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : f$ es holomorfa en $U\}$.
- $\mathcal{O}_X^* = \{\mathcal{O}_X^*(U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{O}_X^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* : f$ es holomorfa en $U\}$.
- $\mathcal{M}_X = \{\mathcal{M}_X(U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{M}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} : f$ es meromorfa en $U\}$.
- $\mathcal{M}_X^* = \{\mathcal{M}_X^*(U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{M}_X^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* : f$ es meromorfa en $U\}$.
- $\mathcal{O}_X[D] = \{\mathcal{O}_X[D](U) : U \in \tau_X\}$, con $\mathcal{O}_X[D](U) = \{f \in \mathcal{M}_X(U) : f \in L(D)\}$, con $D \in \mathrm{Div}(X)$. Este es el fibrado lineal asociado a D. Abordaremos este ejemplo en detalle más adelante.
- $\Omega_X = \{\Omega_X(U) : U \in \tau_X\}$.
- $\mathcal{M}_X^{(1)} = \{\mathcal{M}_X^{(1)}(U) : U \in \tau_X\}$.
- $\Omega_X[D] = \{\Omega_X[D](U) : U \in \tau_X\}$, con $\Omega_X[D](U) = \{\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)}(U) : \omega \in L^{(1)}(D)\}$.

Consideraremos la siguiente definición equivalente.

Definición 6.2. Un prehaz $\mathscr{F}$ (de grupos abelianos) sobre $M \in \mathrm{Top}$ consiste de:

(1) Una base $\{U_\alpha\}$ para cada $U \in \tau_M$.

(2) Un grupo abeliano $\mathscr{J}_\alpha = \mathscr{F}(U_\alpha)$ para cada $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$.

(3) Un homomorfismo $\rho_{\alpha\beta} : \mathscr{J}_\beta \to \mathscr{J}_\alpha$ para cada inclusión $U_\alpha \subset U_\beta$ tal que $\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} = \rho_{\alpha\gamma}$ siempre que $U_\alpha \subset U_\beta \subset U_\gamma$.

Denotamos este prehaz como $\mathscr{F} = \{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$.

Notemos que, esencialmente, un prehaz sobre un espacio topológico nos dice que si una propiedad se satisface en un conjunto, entonces esta se satisface para cualquier subconjunto o, la información local es consistente bajo restricciones. Un haz afirma lo contrario, esto es, una propiedad se satisface si y sólo si esta se satisface en los subconjuntos o, las informaciones locales coinciden para dar información global.

Definición 6.3. *(Axioma de Haz)* Sea $\mathscr{F}$ un prehaz sobre $X \in \mathrm{Top}$, $U \in \tau_X$ y $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento de U. Decimos que $\mathscr{F}$ satisface el axioma de haz para U y $\{U_\alpha\}$ si, dadas $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tal que

$$\rho_{U_i \cap U_j U_i}(s_i) = \rho_{U_j \cap U_j U_i}(s_j)$$

para cada i, j, existe un único elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que

$$\rho_{U_i U}(s) = s_i$$

para cada i.

Decimos que $\mathscr{F}$ es un haz sobre X si este satisface el axioma de haz para cada $U \in \tau_X$ y un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de U.

Otra forma de afirmar la unicidad en la definición anterior es la siguiente: dadas $s, t \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i U}(s) = \rho_{U_i U}(t)$ para cada i, entonces $s = t$.

Notemos que todos los prehaz del Ejemplo 6.2 son haces sobre X pues, dada la propiedad local que define cada uno de estos prehaces, si $s, t \in \mathscr{F}(U)$ son tal que $\rho_{U_i U}(s) = \rho_{U_i U}(t)$ para cada i de un cubrimiento $\{U_i\}$ de U, esto es, $s|_{U_i} = t|_{U_i}$, necesariamente debe ocurrir que $s = t$.

El siguiente es un ejemplo de un prehaz que no satisface el axioma de haz.

Ejemplo 6.3. Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Consideremos $G_X = \{G_X(U) : \emptyset \neq U \in \tau_X\}$, con $G_X(U) = \{f : U \to G : f \text{ es constante}\}$, y definamos $G_X(\emptyset) = \{e\}$ como el grupo trivial de un elemento. Notemos que $G_X(U) \cong G$ para cada $U \in \tau_X$ no vacío. De este modo, dado $U \subseteq V$, tenemos que $\rho_{UV} : G_X(V) \to G_X(U)$ es el homomorfismo identidad y $\rho_{\emptyset U} : G_X(U) \to \{e\}$ es el homomorfismo nulo. Con esto, tenemos que G_X es un prehaz sobre X. Si una colección $\{U_\alpha\}$ de cubrimientos de los $U \in \tau_X$ es dada, tenemos que $\{U_\alpha, G_X(U_\alpha), \rho_{\alpha\beta}\}$ es un prehaz de grupos abelianos sobre X en términos de la Definición 6.2.

Ahora, sea $U \in \tau_X$ y $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de U. Sean $U_i, U_j \in \{U_\alpha\}$ no vacíos disjuntos y consideremos dos elementos $s_i \in G_X(U_i)$, $s_j \in G_X(U_j)$ tal que $s_i(x) = a \in G$ y $s_j(x) = b \in G$, con $a \neq b$. Entonces

$$\rho^{U_i}_{\emptyset = U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{\emptyset = U_i \cap U_j}(s_j) = e.$$

Sin embargo, no hay forma que exista $s \in G_X(U)$ que satisfaga $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$ y $\rho^U_{U_j}(s) = s_j$.

Luego, G_X no satisface el axioma de haz y por tanto no es un haz sobre X. Este es llamado un *prehaz constante* sobre X.

Dados $U_\alpha, U_\beta \in \tau_X$ tal que $U_\alpha \subseteq U_\beta$, usaremos sin distinción las notaciones $\rho^{U_\beta}_{U_\alpha} = \rho_{U_\alpha U_\beta} = \rho_{\alpha\beta}$.

Consideremos la siguiente definición equivalente de haz.

Definición 6.4. Un *Haz* (de grupos abelianos) sobre $M \in \text{Top}$ es un espacio topológico $\mathscr{J}$, junto con una aplicación $\pi : \mathscr{J} \to M$, tal que:

(1) π es un homomorfismo local.

(2) Para cada $p \in M$, el conjunto $\mathscr{J}_p = \pi^{-1}(p) \subset \mathscr{J}$ tiene estructura de grupo abeliano.

(3) Las operaciones de grupo de cada $\mathscr{J}_p$ son continuas respecto a la topología de $\mathscr{J}$.

La tercera condición se ve de forma más explícita de la siguiente manera. En $\mathscr{J} \times \mathscr{J}$ con la topología producto, definamos el espacio topológico

$$\mathscr{J} \circ \mathscr{J} = \{(s_1, s_2) \in \mathscr{J}^2 : \pi(s_1) = \pi(s_2)\} \subset \mathscr{J} \times \mathscr{J},$$

donde la topología en $\mathscr{J} \circ \mathscr{J}$ es la topología subespacio dada por la inclusión.

La aplicación $l : \mathscr{J} \circ \mathscr{J} \to \mathscr{J}$ dada por $(s_1, s_2) \mapsto s_1 - s_2$ está bien definida pues, dado $(s_1, s_2) \in \mathscr{J} \circ \mathscr{J}$, tenemos que $\pi(s_1) = \pi(s_2) = p \in M$, esto es, $s_1, s_2 \in \mathscr{J}_p$, de modo que $s_1 - s_2 \in \mathscr{J}_p \subset \mathscr{J}$. La condición requiere la continuidad de esta aplicación.

En esta definición, la aplicación π es llamada *proyección* y $\mathscr{J}_p$ es llamado *fibra* o *stalk* sobre $p \in M$.

Ejemplo 6.4. Sea G un grupo abeliano y M un espacio topológico. Consideremos $\mathscr{J} = G \times M$ con la topología producto, y definamos $\pi : \mathscr{J} \to M$ como la proyección sobre M. Entonces $\mathscr{J}$ es un haz sobre M. Explícitamente, π es un homeomorfismo local ya que para cada $(g, p) \in \mathscr{J}$, hay una vecindad $N(g, p) \subseteq \mathscr{J}$ tal que $\pi(N(g, p)) \in \tau_X$ y $\pi|_{N(g,p)} : N(g, p) \to \pi(N(g, p))$ es un homeomorfismo.. Además, para cada $p \in M$, tenemos que $\mathscr{J}_p = \{(g, p) \in \mathscr{J} : g \in G\} \cong G$ es un grupo abeliano. Por último, por la topología de $\mathscr{J}$, tenemos que la aplicación l definida anteriormente es continua en este caso. Este es llamado un *haz constante*.

Consideremos la siguiente definición fundamental.

Definición 6.5. Sea $\pi : \mathscr{J} \to M$ un haz sobre M y $U \in \tau_M$. Una *sección* de $\mathscr{J}$ sobre U es una aplicación continua $f : U \to \mathscr{J}$ tal que $\pi : \circ f : U \to U$ es la identidad de U, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J} \arrow[dr, "\pi"] & \\
U \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & M
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Notemos que $f(p) \in \mathscr{J}_p$ para cada $p \in M$.

El conjunto de todas las secciones del haz $\mathscr{J}$ sobre $U \in \tau_M$ es denotado por $\Gamma(U, \mathscr{J})$. Ahora, como π es un homomorfismo local, para cada $s \in \mathscr{J}$ hay una vecindad V tal que

$$\pi|_V : V \to \pi(V) = U$$

es un homeomorfismo. Así, $(\pi|_V)^{-1} : U \to V$ también es un homeomorfismo, de modo que $(\pi|_V)^{-1} \in \Gamma(U, \mathscr{J})$. Por tanto, para cada $s \in \mathscr{J}$, $s \in f(U)$ para alguna $f \in \Gamma(U, \mathscr{J})$, y si $x \in g(U) \cap f(U)$, podemos encontrar $h \in \Gamma(U, \mathscr{J})$ tal que $x \in h(U) \subseteq f(U) \cap g(U)$, Luego conjunto $\{f(U) : f \in \Gamma(U, \mathscr{J})\}$ forma una base para el sistema fundamental de vecindades de s, $\mathcal{N}(s) \subseteq \tau_{\mathscr{J}}$. Una consecuencia importante de esto es que si $f, g \in \Gamma(U, \mathscr{J})$ son tal que $f(p_0) = g(p_0)$ para algún $p_0 \in U$, entonces $f(p) = g(p)$ para cada $p \in U'$, con $U' \subset U$ un abierto tal que $p_0 \in U'$. Esto da la equivalencia entre el axioma de haz y la Definición 6.4.

Ahora, si $f, g \in \Gamma(U, \mathscr{J})$, la aplicación

$$\begin{aligned} f \times g : U &\to \mathscr{J} \times \mathscr{J} \\ p &\mapsto (f(p), g(p)) \end{aligned}$$

es una aplicación continua de U en $\mathscr{J} \circ \mathscr{J} \subset \mathscr{J} \times \mathscr{J}$. Así, la composición

$$\begin{aligned} l \circ (f \times g) : U &\to \mathscr{J} \\ p &\mapsto f(p) - g(p) \end{aligned}$$

es una sección de $\mathscr{J}$ sobre U. Denotaremos por $f - g := l \circ (f \times g)$ a esta aplicación. Esto implica que, con la suma puntual, $\Gamma(U, \mathscr{J})$ tiene estructura de grupo abeliano.

La *sección cero* sobre U, la aplicación que envía $p \in U \mapsto 0_p \in \mathscr{J}_p$, con 0_p el elemento identidad de $\mathscr{J}_p$, es una sección de $\mathscr{J}$ sobre U.

Veremos una importante relación entre un haz sobre un espacio topológico y sus secciones que usaremos posteriormente. En cierto sentido, las secciones de un haz determinan el haz completamente.

Para cada haz $\mathscr{J}$ sobre M y bases $\{U_\alpha\}$ para cada $U \in \tau_M$, hay un prehaz natural asociado llamado *prehaz de secciones* del haz $\mathscr{J}$. Este es el prehaz que asigna a cada $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ el grupo abeliano $\mathscr{J}_\alpha = \Gamma(U_\alpha, \mathscr{J})$, y asigna a cada inclusión $U_\alpha \subset U_\beta$ la aplicación restricción $\rho_{\alpha\beta} : \Gamma(U_\beta, \mathscr{J}) \to \Gamma(U_\alpha, \mathscr{J})$ de secciones sobre U_β al subconjunto U_α.

Recíprocamente, para cualquier prehaz $\{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$ sobre M hay un *haz asociado*, que se construye como sigue:

Para cada $p \in M$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{U}(p) = \{U_\alpha : p \in U_\alpha\}.$$

Este conjunto es parcialmente ordenado por la relación de inclusión "$\subseteq$". Consideremos la unión disjunta

$$\mathscr{J}_p^* = \bigsqcup_{U_\alpha \in \mathcal{U}(p)} \mathscr{J}_\alpha,$$

y para cualquier par de elementos $f_\alpha \in \mathscr{J}_\alpha$, $f_\beta \in \mathscr{J}_\beta$, escribimos $f_\alpha \sim f_\beta$ si y sólo si existe $U_\gamma \in \mathcal{U}(p)$ tal que $U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$ y $\rho_{\gamma\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma\beta}(f_\beta)$. Notemos que en $\mathscr{J}_p^*$, la relación $\sim$ es reflexiva y simétrica. Supongamos que $f_\alpha \in \mathscr{J}_\alpha$, $f_\beta \in \mathscr{J}_\beta$, $f_\gamma \in \mathscr{J}_\gamma$ son tal que $f_\alpha \sim f_\beta$ y $f_\beta \sim f_\gamma$. Entonces existen $U_{\gamma_1}, U_{\gamma_2} \in \mathcal{U}(p)$ tal que $U_{\gamma_1} \subset U_\alpha \cap U_\beta, U_{\gamma_2} \subset U_\beta \cap U_\gamma$ satisfaciendo $\rho_{\gamma_1\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma_1\beta}(f_\beta)$ y $\rho_{\gamma_2\beta}(f_\beta) = \rho_{\gamma_2\gamma}(f_\gamma)$. Tomando $U_{\gamma_{12}} = U_{\gamma_1} \cap U_{\gamma_2}$, tenemos que $U_{\gamma_{12}} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ y $\rho_{\gamma_{12}\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma_{12}\beta}(f_\beta) = \rho_{\gamma_{12}\gamma}(f_\gamma)$. Esto implica que $f_\alpha \sim f_\gamma$. Por tanto, $\sim$ define una relación de equivalencia en $\mathscr{J}_p^*$.

De esta forma, consideremos el cociente $\mathscr{J}_p := \mathscr{J}_p^* / \sim$. Para cualquier conjunto $U_\alpha \in \mathcal{U}(p)$ hay una aplicación natural $\rho_{p\alpha} : \mathscr{J}_\alpha \to \mathscr{J}_p$ que envía cada $f_\alpha \in \mathscr{J}_\alpha$ a su clase de equivalencia $\overline{f_\alpha} = \{f_\beta \in \mathscr{J}_p^* : f_\beta \sim f_\alpha\}$. En $\mathscr{J}_p$ inducimos la operación binaria

$$\begin{aligned} + : \mathscr{J}_p \times \mathscr{J}_p &\to \mathscr{J}_p \\ (\overline{f_\alpha}, \overline{f_\beta}) &\mapsto \overline{f_\alpha} + \overline{f}_\beta := \overline{f_\alpha + f_\beta}, \end{aligned}$$

que está bien definida ya que $f_\alpha, f_\beta \in \mathscr{J}_\alpha$. Esto induce una estructura de grupo abeliano en $\mathscr{J}_p$. El grupo $\mathscr{J}_p$ construido de la familia de grupos $\{\mathscr{J}_\alpha\}$ es llamado grupo límite directo y se denota como

$$\mathscr{J}_p = \underset{U_\alpha \in \mathcal{U}(p)}{\overrightarrow{\lim}} \mathscr{J}_\alpha.$$

El espacio del haz está definido como el conjunto

$$\mathscr{J} = \bigcup_{p \in M} \mathscr{J}_p,$$

con la aplicación proyección $\pi : \mathscr{J} \to M$ satisfaciendo $\pi(\mathscr{J}_p) = p$, esto es, $\pi^{-1}(p) = \mathscr{J}_p$. Como una base para la topología de $\mathscr{J}$, tomamos los conjuntos de la forma

$$[f_\alpha] = \bigcup_{p \in U_\alpha} \rho_{p\alpha}(f_\alpha) \subset \mathscr{J},$$

para cada $f_\alpha \in \mathscr{J}_\alpha$. Para ver que esta colección es una base, notemos que para cada $\overline{f_\alpha} \in \mathscr{J}$ tenemos que $\overline{f_\alpha} \in [f_\alpha]$. Además, si $s \in [f_\alpha] \cap [f_\beta]$ y $p = \pi(s)$, entonces $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $\rho_{p\alpha}(f_\alpha) = \rho_{p\beta}(f_\beta)$. Por definición de $\rho_{p\alpha}$, $f_\alpha \sim f_\beta$ y por tanto existe un abierto U_γ tal que $p \in U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$ y $\rho_{\gamma\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma\beta}(f_\beta)$. Luego, $s \in [f_\alpha] \cap [f_\beta] \cap [f_\gamma]$. Esto muestra la afirmación.

Con esta topología, la aplicación proyección $\pi : \mathscr{J} \to M$ es un homeomorfismo local ya que, para cada $s = \overline{f_\alpha} \in \mathscr{J}$, la restricción $\pi|_{[f_\alpha]} : [f_\alpha] \to U_\alpha$ es un homeomorfismo.

Para probar que $\mathscr{J}$ es un haz, queda ver que las operaciones de grupo son continuas respecto a la topología inducida anteriormente. Para esto, tomemos $(s_1, s_2) \in \mathscr{J} \circ \mathscr{J}$, consideremos $[f_\alpha] \subset \mathscr{J}$ cualquier vecindad abierta de $s_1 - s_2 \in \mathscr{J}$ y sea $p = \pi(s_1) = \pi(s_2)$. Además, tomemos un par de elementos $f_{1\beta_1} \in \mathscr{J}_{\beta_1}$, $f_{2\beta_2} \in \mathscr{J}_{\beta_2}$ tales que $\rho_{p\beta_1}(f_{1\beta_1}) = s_1$ y $\rho_{p\beta_2}(f_{2\beta_2}) = s_2$. Entonces $\rho_{p\alpha}(f_\alpha) = \rho_{p\beta_1}(f_{1\beta_1}) - \rho_{2\beta_2}(f_{2\beta_2})$. Esto implica que, por definición de la aplicación $\rho_{p\alpha}$, exista un abierto $U_\gamma \in \mathcal{U}(p)$ tal que $\rho_{\gamma\alpha}(f_\alpha) = \rho_{\gamma\beta_1}(f_{1\beta_1}) - \rho_{\gamma\beta_2}(f_{2\beta_2})$. Luego, bajo la aplicación l definida previamente, se deduce que $([\rho_{\gamma\beta_1}(f_{1\beta_1})] \times [\rho_{\gamma\beta_2}(f_{2\beta_2})]) \cap \mathscr{J} \circ \mathscr{J}$ es una vecindad abierta de $(s_1, s_2) \in \mathscr{J} \circ \mathscr{J}$ que se transforma en $[f_\alpha]$, probando la continuidad.

Notemos que iniciando con un haz $\mathscr{J}$, podemos formar el prehaz de secciones de $\mathscr{J}$ respecto a bases $\{U_\alpha\}$ de los abiertos de la topología del espacio topológico, y entonces definir el haz asociado de este prehaz de secciones de $\mathscr{J}$ da un haz que debe ser esencialmente igual al haz inicial $\mathscr{J}$. Estas construcciones (en este orden), son inversas una de la otra.

No es cierto, en todo caso, que las construcciones (en el orden inverso) sean inversas. Esto es, el prehaz de secciones del haz asociado a un prehaz no siempre es igual al prehaz. Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 6.5. Consideremos el prehaz $\{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha \cong \mathbb{Z}, \rho_{\alpha\beta} \equiv 0\}$ sobre algún espacio topológico M. Tomando $p \in M$, tenemos que el conjunto $\mathscr{J}_p^*$ definido arriba es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y todos los elementos están relacionados pues siempre podremos encontrar un abierto menor conteniendo al punto p donde las restricciones de estos elementos al abierto menor coincidan (siempre son 0). Luego, el cociente $\mathscr{J}_p^*/\sim$, tomando como representante $0 \in \mathbb{Z}$, consiste únicamente de un elemento, $\overline{0}$. De este modo, el espacio del haz es $\mathscr{J} = \{0\}$. Este es llamado el *cero-haz*. Por la construcción que realizamos arriba, el prehaz de secciones del cero-haz asocia a cada abierto U_α el grupo trivial y a cada inclusión la identidad del grupo trivial, esto es, el prehaz $\{U_\alpha, \Gamma(U_\alpha, \mathscr{J}) \cong 0, \rho_{\alpha\beta} \equiv 0\}$.

De esta forma, la pregunta que surge de forma natural es cuándo un prehaz sobre un espacio topológico coincide con el prehaz se secciones de un haz dado.

Definición 6.6. Un prehaz $\{U_\alpha, \mathscr{J}, \rho_{\alpha\beta}\}$ sobre un espacio topológico M es llamado un *prehaz completo* si, siempre que $U_0 = \bigcup_\beta U_\beta$ para alguna subcolección $\{U_\beta\}$ de las bases $\{U_\alpha\}$, las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) Si $f_0, g_0 \in \mathscr{J}_0$ son tal que $\rho_{\beta 0}(f_0) = \rho_{\beta 0}(g_0)$ para cada $U_\beta \in \{U_\beta\}$, entonces $f_0 = g_0$.

(2) Si $\{f_\beta \in \mathscr{J}_\beta\}$ son elementos tales que $\rho_{\gamma\beta_1}(f_{\beta_1}) = \rho_{\gamma\beta_2}(f_{\beta_2})$ siempre que $U_\gamma \subset U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ para cualquier elemento de U_γ de la base, entonces existe $f_0 \in \mathscr{J}_0$ tal que $f_\beta = \rho_{\beta 0}(f_0)$ para todo $U_\beta \in \{U_\beta\}$.

El siguiente resultado responde la pregunta planteada previamente (ver [Gun66], Pág 19, Lema 3).

Lema 6.1. *Un prehaz $\{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$ sobre un espacio topológico M es el prehaz de secciones de algún haz sobre M si y sólo si es un prehaz completo.*

Notemos que si $\{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$ es el prehaz de secciones de un haz $\mathscr{J}$, por el axioma de haz, las condiciones de la Definición 6.6 se satisfacen para este prehaz y por tanto es completo. La afirmación contraria consiste en probar que la aplicación

$$\mathscr{J}_\alpha \to \Gamma(U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha)$$
$$f_\alpha \mapsto [f_\alpha] = \bigcup_{p \in U_\alpha} \rho_{p\alpha}(f_\alpha)$$

es un isomorfismo para cada U_α, siendo $\mathscr{J}$ el haz asociado al prehaz $\{U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$.

Una observación importante es que, dado un prehaz $\mathscr{F}$ sobre un espacio topológico M, hemos dicho que $s \in \mathscr{F}(U)$, con $U \in \tau_M$, es una sección. Realizando la construcción del haz asociado $\mathscr{J}$ al prehaz $\mathscr{F}$, tenemos que s induce una aplicación $\overline{s} : U \to \mathscr{J}$ definida por $x \mapsto s_x$, donde s_x es la imagen de s en el stalk $\mathscr{F}_x$. Esta aplicación se vuelve continua por la topología definida en $\mathscr{J}$, que es la topología más gruesa sobre $\mathscr{J}$ tal que las aplicaciones $\overline{s}$ son continuas para cada abierto U de X. Es por esto que tomamos las secciones como en la Definición 6.5.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.6. Completando uno de los casos del Ejemplo 6.2, sea $X \in \mathcal{RS}$. El prehaz $\mathcal{O}_X$ dado allí, en la notación reciente, es el prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{O}_X(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})\}$. El haz asociado a este prehaz, llamado *haz de gérmenes de funciones holomorfas* sobre X, es $\mathcal{O}_X$. Esto es, para cada $p \in X$ definimos $\mathcal{U}(p) = \{U_\alpha : p \in U_\alpha\}$, definimos $(\mathcal{O}_{Xp})^*$ como la unión disjunta de las $\mathbb{C}-$álgebras $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$, con $U_\alpha \in \mathcal{U}(p)$. Luego, bajo la relación de equivalencia $\sim$ en $(\mathcal{O}_{Xp})^*$ que definimos arriba, $\mathcal{O}_{Xp}$ es el cociente $(\mathcal{O}_{Xp})^*/\sim$. De esta forma, el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre X, $\mathcal{O}_X$, es la unión con $p \in X$ de los $\mathcal{O}_{Xp}$, cuya proyección satisface que $\pi(\mathcal{O}_{Xp}) = p$ para cada $o \in X$. Para interpretar el stalk $\mathcal{O}_{Xp}$ de $p \in X$, sea $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$ una carta, con $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha$, tal que φ está centrada en p. Sea $V = \varphi_\alpha(\operatorname{dom}\varphi_\alpha)$. Para ver la estructura local de $\mathcal{O}_{Xp}$, consideremos la colección $\mathcal{U}(0)$. En cada $U_\alpha \in \mathcal{U}(0)$, consideramos la $\mathbb{C}-$álgebra $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_\alpha)$. Dos de estas funciones son equivalentes si coinciden en un abierto menor de $\mathcal{U}(0)$, y las clases de equivalencia, llamados gérmenes de funciones holomorfas en $0 \in \mathbb{C}$, forman el stalk $\mathcal{O}_{Xp}$.

A cada función holomorfa en $U_\alpha \in \mathcal{U}(0)$, le asociamos su expansión en serie de potencias, y cada serie de potencias se obtiene de un único germen. Por tanto, $\mathcal{O}_{Xp} \cong \mathbb{C}\{z\} = \{s \in \mathbb{C}[\![z]\!] : s \text{ converge}\}$, con $\mathbb{C}[\![z]\!]$ el anillo de series formales en la variable z.

Más aún, notemos que el prehaz $\{U_\alpha, \mathcal{O}_X(U_\alpha), \rho_{\alpha\beta}\}$ es completo por la propiedad local que define los gérmenes de funciones. Por tanto, con el isomorfismo definido en el esquema de demostración del lema anterior, es posible identificar $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_\alpha)$. Esto es, las secciones del haz $\mathcal{O}_X$ sobre cualquier $U \in \tau_X$ se identifica con la $\mathbb{C}-$álgebra $\mathcal{O}_X(U)$ de funciones holomorfas sobre U.

Estas observaciones valen para todos los casos del Ejemplo 6.2. Notemos que tenemos las relaciones de inclusión natural

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \mathcal{C}_X,$$

con $\mathcal{C}_X$ el haz de gérmenes de funciones continuas sobre $X \in \mathcal{RS}$.

6.1. Relaciones Entre Haces

Varias relaciones entre haces sobre un espacio topológico fijo M son de gran importancia en las aplicaciones. Primero, para un haz $\mathscr{J}$ sobre M con proyección $\pi : \mathscr{J} \to M$, sea $E \subset M$ cualquier subconjunto. La restricción de $\mathscr{J}$ a E, denotado por $\mathscr{J}|_E$, es el subconjunto $\pi^{-1}(E) \subset \mathscr{J}$ y es un haz sobre E, donde su proyección es la restricción a $\pi^{-1}(E)$ de π. En particular, para cualquier $p \in M$, tenemos que $\mathscr{J}|_p = \mathscr{J}_p$ es simplemente el stalk de $\mathscr{J}$ sobre p.

Ejemplo 6.7. Sí $X \in \mathcal{RS}$, cualquier $U \in \tau_X$ también es una superficie de Riemann, y su haz de gérmenes de funciones holomorfas es la restricción $\mathcal{O}_X|_U$.

Consideremos la siguiente definición.

Definición 6.7. Sea $\mathscr{R} \subset \mathscr{J}$, con $\mathscr{J}$ un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico M. Entonces $\mathscr{R}$ es llamado un subhaz de $\mathscr{J}$ si:

(1) $\mathscr{R} \in \tau_{\mathscr{J}}$.

(2) Para cada $p \in M$, $\mathscr{R} \cap \mathscr{J}_p = \mathscr{R}_p$ es un subgrupo de $\mathscr{J}_p$.

Si $\mathscr{R}$ es un subhaz de $\mathscr{J}$, ya que $\mathscr{J}_p$ es abeliano y $\mathscr{R}_p \leq \mathscr{J}_p$ es normal, podemos considerar el cociente $\mathscr{Q}_p = \mathscr{J}_p/\mathscr{R}_p$ para cada $p \in M$. Definimos el *haz cociente* $\mathscr{Q} = \mathscr{J}/\mathscr{R}$ como

$$\mathscr{Q} = \bigcup_{p \in M} \mathscr{Q}_p,$$

con la proyección $\pi_1 : \mathscr{Q} \to M$ satisfaciendo $\pi_1(\mathscr{Q}_p) = p$.

La aplicación $\varphi : \mathscr{J} \to \mathscr{Q}$ que envía $f_p \in \mathscr{J}_p$ a su clase en $\mathscr{Q}_p = \mathscr{J}_p/\mathscr{R}_p$ conmuta con las proyecciones π y π_1 en $\mathscr{J}$ y $\mathscr{Q}$, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathscr{Q} \arrow[r, "\pi_1"'] & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

En $\mathscr{Q} = \mathscr{J}/\mathscr{R}$ definimos la topología cociente mediante la aplicación φ. Sea $s \in \mathscr{Q}$ y consideremos una vecindad $U \in \tau_{\mathscr{Q}}$ de s. Entonces $\varphi^{-1}(U) \in \tau_{\mathscr{J}}$. Sea $s' \in \varphi^{-1}(U)$ y consideremos una vecindad abierta $V \subseteq \varphi^{-1}(U)$ tal que s' y $\pi|_V : V \to \pi(V)$ es un homeomorfismo. Entonces $\pi_1 \circ \varphi|_V = \pi_1|_{\varphi(V)}$ debe ser un homeomorfismo ya que $\pi(x) = \pi(\varphi(x))$ para todo $x \in V$, forzando que $\varphi(V)$ sea una vecindad abierta de $s \in \mathscr{Q}$.

Ahora, sea $l_1 : \mathscr{Q}_p \circ \mathscr{Q}_p \to \mathscr{J}_p$ definida por $(s_1, s_2) \mapsto s_1 - s_2$. Sea $U \in \tau_{\mathscr{Q}_p}$ tal que $s_1 - s_2 \in U$ y consideremos $\varphi^{-1}(U) \in \tau_{\mathscr{J}}$. Sean $s' \in \varphi^{-1}(s_1 - s_2)$ y $V \in \tau_{\mathscr{J}}$ tal que $s' \in V$. Como $\mathscr{J}$ es un haz, $l^{-1}(V) \subset \mathscr{J}_p \circ \mathscr{J}_p$, donde $p = \pi(s_i)$, es abierto ya que la operación de grupo de $\mathscr{J}_p$ es continua. Descomponiendo $l^{-1}(V)$ como el producto de dos abierto $V_1 \times V_2 \subset \mathscr{J}_p \circ \mathscr{J}_p$, tenemos que $\varphi(V_1) \times \varphi(V_2) \subset \mathscr{Q}_p \circ \mathscr{Q}_p$ es un abierto que se transforma en U bajo l_1, esto es, l_1 es continua. Por tanto, el haz cociente $\mathscr{Q}$ es un haz sobre M.

Ahora, sean $\mathscr{J}$ y $\mathscr{R}$ dos haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico M, con proyecciones $\pi_1 : \mathscr{J} \to M$ y $\pi_2 : \mathscr{R} \to M$.

Definición 6.8. Una aplicación $\varphi : \mathscr{J} \to \mathscr{R}$ es llamado un morfismo de haces si:

(1) φ es continua.

(2) $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \mathscr{R} \arrow[r, "\pi_2"'] & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

La segunda condición de la definición anterior implica que, para todo $p \in M$, $\varphi(\mathscr{J}_p) \subset \mathscr{R}_p$. De esta forma, los morfismos entre haces preservan stalks. Más aún, para cualquier $f \in \Gamma(U, \mathscr{J})$, con $U \in \tau_M$, $\varphi \circ f$ será una aplicación continua de U en $\mathscr{R}$ tal que $\pi_2 \circ \varphi \circ f = id_U$. Luego, $\varphi \circ f \in \Gamma(U, \mathscr{R})$.

Por tanto, el morfismo de haces φ induce una aplicación, llamada *aplicación inducida*,

$$\begin{aligned} \varphi^* : \Gamma(U, \mathscr{J}) &\to \Gamma(U, \mathscr{R}). \\ f &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

En particular, ya que $\{f(U) : U \in \tau_M,\ f \in \Gamma(U, \mathscr{J})\}$ es una base para la topología de $\mathscr{J}$, el morfismo de haces φ es una aplicación abierta, y como π_1, π_2 son homomorfismos locales, también lo es φ. Esto es, cualquier morfismo de haces necesariamente es un homomorfismo local.

Un morfismo de haces $\varphi : \mathscr{J} \to \mathscr{R}$ es llamado un *homomorfismo de haces* si $\varphi_p : \mathscr{J}_p \to \mathscr{R}_p$ es un homomorfismo de grupos, para cada $p \in M$. En este caso, la aplicación inducida φ^* es un homomorfismo entre los grupos de secciones, llamado *homomorfismo inducido.*

Un homomorfismo de haces φ es un *isomorfismo de haces* si $\varphi_p : \mathscr{J}_p \to \mathscr{R}_p$ es un isomorfismo de grupos. En este caso, decimos que $\mathscr{J}$ es isomorfo a $\mathscr{R}$, y lo denotamos por $\mathscr{J} \cong \mathscr{R}$.

Ejemplo 6.8. Sea $X \in \mathcal{RS}$ y consideremos el haz $\mathcal{O}_X$ de gérmenes de funciones holomorfas sobre X. Para cada germen $f_p \in \mathcal{O}_{Xp}$, asociemos el germen $e(f_p) = \exp(2\pi i\ f_p) \in \mathcal{O}^*_{Xp}$. Esto determina un homomorfismo de haces $e : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^*_X$. De este mismo modo, $e : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*_X$ definido como antes determina un homomorfismo de haces.

Para cualquier homomorfismo de haces $\varphi : \mathscr{J} \to \mathscr{R}$, el kernel de φ es

$$\ker(\varphi) = \{s \in \mathscr{J} : \varphi(s) = 0_p \in \mathscr{R}_p,\ \text{para algún } p \in M\},$$

esto es, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subset \mathscr{J}$, con $0 \in \Gamma(M, \mathscr{R})$ la cero-sección de $\mathscr{R}$. Como $0(M) \subset \mathscr{R}$ es abierto y φ es continua, $\ker(\varphi)$ es abierto en $\mathscr{J}$ y por tanto es un subhaz de $\mathscr{J}$. Por otro lado, como φ es una aplicación abierta, $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathscr{J}) \subset \mathscr{R}$ es abierto en $\mathscr{R}$. Para ver que $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un subhaz de $\mathscr{R}$, notemos que $\mathscr{R}_p \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathscr{J}_p) \subset \mathscr{R}_p$ pues φ preserva stalks, y como φ es homomorfismo de haces, $\varphi_p : \mathscr{J}_p \to \mathscr{R}_p$ es homomorfismo y por tanto $\mathrm{Im}(\varphi_p) = \varphi(\mathscr{J}_p) \leq \mathscr{R}_p$. Luego, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathscr{R}$ es un subhaz de $\mathscr{R}$.

Además, tenemos que

$$\mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathscr{J} / \ker(\varphi),$$

pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J}_p \arrow[r] \arrow[d] & \varphi(\mathscr{J}_p) = \mathrm{Im}(\varphi_p) \\
\mathscr{J}_p / \ker(\varphi_p) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

se satisface para todo $p \in M$.

Ahora, dados dos homomorfismo de haces $\varphi : \mathscr{R} \to \mathscr{J}$ y $\psi : \mathscr{J} \to \mathscr{Q}$, el diagrama

$$\mathscr{R} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathscr{J} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{Q}$$

se llamará una *sucesión exacta* de haces si $\mathrm{Im}(\varphi) = \ker(\psi)$. Si

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{J}_{i-2} \xrightarrow{\varphi_{i-2}} \mathscr{J}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathscr{J}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{J}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathscr{J}_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

es una cadena más extensa de haces y homomorfismos de haces, esta será llamada una sucesión exacta si $\ker(\varphi_i) = \mathrm{Im}(\varphi_{i-1})$ para cada índice i de la cadena.

En particular, si 0 denota el cero-haz, una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathscr{J} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{Q} \longrightarrow 0$$

será una sucesión exacta corta si φ es inyectiva (monomorfismo), ψ es sobreyectiva (epimorfismo) y $\ker(\psi) = \operatorname{Im}(\varphi)$.

De este último diagrama podemos ver que $\mathscr{Q} \cong \mathscr{J}/\varphi(\mathscr{R})$. Recíprocamente, si $\mathscr{R} \subset \mathscr{J}$ es un subhaz de $\mathscr{J}$, la inclusión $i : \mathscr{R} \hookrightarrow \mathscr{J}$ es un homomorfismo de haces y la aplicación natural $\varphi : \mathscr{J} \to \mathscr{J}/\mathscr{R}$ es un homomorfismo de haces, tal que

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{i} \mathscr{J} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{J}/\mathscr{R} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de haces.

Finalizaremos la sección con un interesante ejemplo sobre superficies de Riemann.

Ejemplo 6.9. Sea $X \in \mathcal{RS}$ y consideremos el subconjunto $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_X$ de gérmenes de funciones holomorfas que solo toman valores enteros. Este es un subhaz de $\mathcal{O}_X$ isomorfo al haz constante. De hecho, $\mathbb{Z} = \ker(e)$, donde $e : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ es es homomorfismo de haces introducido en el ejemplo anterior. Este homomorfismo e es sobreyectivo ya que $\operatorname{Log}(f_p) \in \mathcal{O}_{Xp} \xrightarrow{e} f_p \in \mathcal{O}_{Xp}^*$, esto es, cada $f_p \in \mathcal{O}_{xp}^*$ tiene un logaritmo holomorfo (bajo cierta determinación) cerca a $p \in X$, un elemento del haz de gérmenes de funciones holomorfas en una vecindad abierta de p. Esto nos lleva a la sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{e} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Similarmente, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C}_X \xrightarrow{e} \mathcal{C}_X^* \longrightarrow 0,$$

considerando los haces de gérmenes de funciones continuas sobre X.

Referencias

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1995. ISBN: 0821802682.

[Rem98] Reinhold Remmert. «From Riemann Surfaces to Complex Spaces». En: *Société Mathématique de France* (1998).

[Ahl66] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., 1966. ISBN: 9780080491141.

[Gun66] Robert C. Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces*. MATHEMATICAL NOTES. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1966. ISBN: 0691079978.

[Mun74] James R. Munkres. *Topology, A First Course*. Pearson College Div, 1974. ISBN: 0139254951.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projective Space*. Springer-Verlag Berlin, 2013. ISBN: 978-3-642-37955-0.

[Cle80] C. Herbert Clemens. *A Scrapbook of Complex Curve Theory (Graduate Studies in Mathematics)*. Graduate Studies in Mathematics. Amer Mathematical Society, 1980. ISBN: 0821833073.

[Ful74] William Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Addison Wesley Publishing Company, 1974. ISBN: 0805330828.

[Zal13] F Zaldívar. *Notas de geometrıa algebraica*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2013.

[E20] Bartolo A. E. «Superficies de Riemann». En: *Universidad de Zaragoza, CIEN* (2020).